

Received: Jun 10, 2023

Revised: Aug 24, 2023

Accepted: Aug 28, 2023

การลดขั้นตอนการแปลงเชิงอนุพันธ์สำหรับการสั่นของเมมเบรน

REDUCED DIFFERENTIAL TRANSFORMATION METHOD FOR VIBRATION OF MEMBRANES

กมลภัสสร มั่นศิลป์^{1*} ฐาปนา นามประดิษฐ์² วิสрут คล้ายแจ้ง³^{1,2}สาขาวิชาวิศวกรรมบูรณา โครงการจัดตั้งคณะวิศวกรรมศาสตร์บูรณาการและเทคโนโลยี วิทยาเขตจันทบุรี มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลตะวันออก³กองการศึกษา โรงเรียนนายเรืออากาศนวมินทกษัตริยาธิราชKamonpad Mansilp^{1*} Thapana Nampradit² Wisarut Klaychang³^{1,2}Department of Integrated Engineering, Establishment Project Faculty of Integrated Engineering and Technology Chanthaburi campus, Rajamangala University of Technology Tawan-Ok³Faculty of Academie, Navaminda Kasatriyadhiraj Royal Air Force Academy

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้ได้แสดงการหาผลเฉลยประมาณค่าโดยวิธีการลดขั้นตอนการแปลงเชิงอนุพันธ์(RDTM) ในรูปแบบ 3 มิติของการแปลงเชิงอนุพันธ์(DTM)ของสมการการเคลื่อนที่ของเมมเบรนโดยกำหนดค่าเงื่อนไขเริ่มต้นและค่าขอบ พิจารณาจากผลเฉลยวิเคราะห์และเปรียบเทียบกับผลเฉลยประมาณค่าของวิธีการลดขั้นตอนการแปลงเชิงอนุพันธ์พบว่าค่าความคลาดเคลื่อนน้อยมาก จึงทำให้วิธีการลดขั้นตอนการแปลงเชิงอนุพันธ์มีประสิทธิภาพในการหาผลเฉลยสมการการเคลื่อนที่ของเมมเบรนได้อย่างง่ายดายเมื่อเราเพิ่มพจน์การหน่วง พจน์การหน่วงกับแรงภายนอกและพจน์แรงภายนอก จะพบว่า แอมพลิจูดของกราฟและค่าของผลเฉลยในแต่ละเวลาลดลง วิธีการลดขั้นตอนการแปลงเชิงอนุพันธ์(RDTM)นี้ จึงเป็นวิธีลดขั้นตอนในการหาผลเฉลยจากรูปแบบเดิมที่ซับซ้อนที่มีอยู่ก่อนเดิมทำให้สามารถหาผลเฉลยประมาณค่าได้อย่างง่ายและลดขั้นตอนในการทำงาน โดยฟังก์ชันของผลเฉลยอยู่ในรูปฟังก์ชันพหุนาม

คำสำคัญ: วิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์, วิธีการลดขั้นตอนการแปลงเชิงอนุพันธ์, สมการการเคลื่อนที่ของเมมเบรน

Abstract

This research demonstrates the calculation of an estimated solution for the membrane motion equation with given initial and boundary conditions using the 3D reduced differential transformation method (RDTM) obtained from the normal differential transformation (DTM). By comparing the analytical solution and the approximate solution obtained from RDTM, it is found that the approximate error is considerably small. Therefore, the RDTM is effective in solving the equation of membrane motion. In addition, adding a damping term, an external force term as well as both damping and external force terms result in a decrease in the approximate solution amplitude for each time. In conclusion, the RDTM is the method with less complexity compared to the analytical method, so that it is possible to find an approximate solution in terms of the polynomials of t conveniently.

Keywords: Differential Transformation Method, Reduced Differential Transformation Method, The equation of motion of a membrane

บทนำ

นักวิจัยหลายคนพยายามที่จะเข้าใจปรากฏการณ์ต่าง ๆ ที่เกิดขึ้นในธรรมชาติโดยใช้ความรู้จากสาขาต่าง ๆ เช่น วิศวกรรมเครื่องกล วิศวกรรมไฟฟ้า วิศวกรรมอุตสาหการ พลังงานและการแพทย์ ปัญหาเหล่านี้ส่วนใหญ่ได้รับการศึกษาโดยใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์บางรูปแบบโดยใช้สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (Ordinary Differential Equation : ODE) และสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (Partial Differential Equation : PDE) ปัญหาเหล่านี้จำเป็นต้องมีการหาผลเฉลยและวิธีการแก้ไขที่ถูกต้องไม่ว่าจะเป็นวิธีการหาผลเฉลยเชิงวิเคราะห์หรือการแก้ปัญหาโดยการหาผลเฉลยประมาณค่า

การแปลงเชิงอนุพันธ์(Differential Transformation Method : DTM) เป็นเครื่องมือที่มีประสิทธิภาพมากที่ใช้ในงานวิจัยจำนวนมากเพื่อแก้สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ(ODE) และสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย(PDE) การศึกษาการแปลงเชิงอนุพันธ์ (DTM) ขึ้นอยู่กับการกระจายของอนุกรมเทย์เลอร์อันดับสูง วิธีนี้เป็นเครื่องมือสำหรับการแก้สมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นและไม่เชิงเส้น Kothandapani, J. & Bharathi, V. (2016), Singh, J., Rashidi, M., Sushila, M. & Kumar, D. (2017), Zedan, A. & AliAlghamdi, M. (2012) และสำหรับการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยสองและสามมิติในปัญหาเชิงเส้นและไม่เชิงเส้นทั้งสอง วิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ (DTM) สามารถใช้ในการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ภายใต้เงื่อนไขเริ่มต้นและขอบเขตที่มีทั้งเงื่อนไขเชิงเส้นและไม่เชิงเส้นภายในช่วงข้อผิดพลาดที่ยอมรับได้ Mirzaee, F. & Yari, M.K. (2015)

การลดขั้นตอนการแปลงเชิงอนุพันธ์(Reduced Differential Transformation Method : RDTM) เป็นวิธีการหนึ่งที่ได้ประยุกต์ต่อจากการแปลงเชิงอนุพันธ์เพื่อช่วยลดขั้นตอนในการหาคำตอบให้ง่ายขึ้นได้อย่างมีประสิทธิภาพ การลดขั้นตอนวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์แบบ 2 มิติและ 3 มิติได้ใช้ประยุกต์ในการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยทั้งแบบเชิงเส้นและไม่เชิงเส้น Yildiray, K., Ibrahim, C. & Ayse Betul, K. (2011) ใช้ RDTM เพื่อหาผลเฉลยกับสมการ Sine-Gordon ซึ่งสามารถจัดผลเฉลยอยู่ในรูปอย่างง่าย ต่อมา Vineet, K., Mukesh, K. & Chaurasia, R.K. (2014) ได้ใช้ RDTM ใน 2 มิติ และ 3 มิติสำหรับสมการ Hyperbolic telegraph Yildiray, K. & Galip, O. (2010) ใช้ RDTM ในการหาผลเฉลยสมการ The generalized Korteweg - de Vries ทำให้ RDTM ถูกใช้แพร่หลายมากขึ้น Saravanan, A. & Magesh, N. (2013) จึงนำ RDTM มาเปรียบเทียบกับผลเฉลยกับวิธี the domain decomposition สำหรับสมการ The Newell-Whitehead-Segel ซึ่ง RDTM สามารถแก้ปัญหาได้ดีในปัญหาไม่เชิงเส้นโดยใช้สัมประสิทธิ์พหุนาม Mohammed, O. Al-Amr. (2014) ได้ประยุกต์ RDTM เพื่อหาผลเฉลยของสมการอนุพันธ์ย่อยไม่เชิงเส้น Vineet, K. Mukesh, K. & Kumar, S. (2014), Vineet, K. Mishra, N. Kumar, S. Kumar, B. & Mukesh, K. (2014), Taghavi, A. Babaei, A. & Mohammadpour, A. (2015), Mohamed, S. & Khaled, A. (2017), Elsaid, A. & Helal, S.M. (2020), Timilehin, K.A. & Adedapo, C.L. (2021) ได้ใช้ RDTM ใน 2 มิติ และ 3 มิติเพื่อประมาณค่าด้วยเงื่อนไขเริ่มต้นและปัญหาค่าขอบซึ่งจัดผลเฉลยอยู่ในรูปแบบเฉพาะ โดยพิจารณาจากสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันพหุนามโดยใช้พจน์ก่อนหน้าประมาณค่าพจน์ถัดไป การประมาณค่าด้วยวิธีนี้จึงมีประสิทธิภาพอย่างมากกับสมการที่อธิบายพฤติกรรมของธรรมชาติในรูปแบบต่างๆได้

ในการศึกษาการแปลงเชิงอนุพันธ์ของการสั่นของเมมเบรน Mansilp, K. & Kasemsuwan, J. (2019) ซึ่งจะมีลักษณะการสั่นเหมือนหนังกลอง ผลเฉลยที่ได้เมื่อเปรียบเทียบกับผลเฉลยวิเคราะห์ (analytical solution) ซึ่งเกิดค่าความผิดพลาดน้อยมากจึงทำให้ DTM เป็นวิธีการที่เหมาะสมในการหาผลเฉลยประมาณค่าแต่บางครั้งการแปลงสมการอยู่ในรูปแบบที่ซับซ้อนและมีจำนวนการใช้สัญลักษณ์ผลบวกมาก ทำให้คอมพิวเตอร์ที่ช่วยในการคำนวณมีค่าความผิดพลาด ทางผู้วิจัยจึงได้ใช้ RDTM ซึ่งเป็นวิธีการที่ช่วยให้การหาผลเฉลยที่ซับซ้อนให้ง่ายขึ้นและเกิดค่าความผิดพลาดน้อยที่สุด

ขอบเขตงานวิจัย

1. สมการการเคลื่อนที่ของเมมเบรน (The equation of motion of a membrane)

สมการการเคลื่อนที่ตามแนวขวางของการสั่นของเมมเบรน Rao, S. (2004) คือ

$$P \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + f(x, y, t) = p(x, y) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (1)$$

เมื่อ $f(x, y, t)$ คือ แรงในทิศทางแกน z (แรงภายนอก)

p คือ ความเข้มสูงสุดที่จุดแรงดึง (ผลของความเค้นแรงดึงและความหนาของเมมเบรน)

$\rho(x, y)$ คือ น้ำหนักต่อหนึ่งหน่วยพื้นที่
ให้ $f(x, y, t) = 0, P = 1$ และ $\rho(x, y) = 1$ แทนค่าใน (1)

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (2)$$

เงื่อนไขเริ่มต้น Rao, S. (2004) คือ

$$w(x, y, 0) = \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}, 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b,$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}(x, y, 0) = 0, 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b,$$

เมื่อกำหนดให้ $a = 1$ และ $b = 1$

ขอบเขตเงื่อนไขของสมการการสั่นของเมมเบรนคือ

$$w(x, 0, t) = 0, 0 \leq x \leq 1,$$

$$w(0, y, t) = 0, 0 \leq y \leq 1,$$

$$w(x, 1, t) = 0, 0 \leq x \leq 1,$$

$$w(1, y, t) = 0, 0 \leq y \leq 1, t \in R \quad (3)$$

2. ผลเฉลยวิเคราะห์ (Analytical solution)

จาก Rao, S. (2004) พิจารณา (2) เงื่อนไขเริ่มต้น $w(x, y, 0) = \sin \pi x \sin \pi y$ และ $\frac{\partial w}{\partial t}(x, y, 0) = 0$ ด้วย

ขอบเขตเริ่มต้นใน (3) Mansilp, K. & Kasemsuwan, J. (2019) เราจะได้ผลเฉลยวิเคราะห์ (analytical solution) คือ

$$w(x, y, t) = \sin \pi x \sin \pi y \cos \sqrt{2} \pi t \quad (4)$$

ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

1. การแปลงเชิงอนุพันธ์สามมิติ (Three-Dimensional Differential Transform Method) Mansilp, K. & Kasemsuwan, J. (2019)

นิยามพื้นฐานของการแปลงเชิงอนุพันธ์คือ

นิยามที่ 1 การแปลงเชิงอนุพันธ์สามมิติของฟังก์ชัน $w(x, y, t)$ กำหนดโดย

$$w(x, y, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} W(k, h, m) x^k y^h t^m \quad (5)$$

นิยามที่ 2 การแปลงผกผันเชิงอนุพันธ์สามมิติของลำดับ $\{W(k, h, m)\}_{k, h, m=0}^{\infty}$ กำหนดโดย

$$W(k, h, m) = \frac{1}{k! h! m!} \left. \frac{\partial^{k+h+m} w(x, y, t)}{\partial x^k \partial y^h \partial t^m} \right|_{(0,0,0)} \quad (6)$$

3. การลดขั้นตอนการแปลงเชิงอนุพันธ์ (Reduced Differential Transform Method) Mohamed, S., & Khaled, A. (2017)

นิยามพื้นฐานของการลดชั้นการแปลงเชิงอนุพันธ์ โดยพิจารณาฟังก์ชันสามตัวแปร $w(x, y, t)$ เขียนอยู่ในรูปผลคูณของฟังก์ชันตัวแปรเดียวสามฟังก์ชัน เช่น $w(x, y, t) = f(x)h(y)g(t)$ จากคุณสมบัติการแปลงเชิงอนุพันธ์สามารถแสดงได้ดังนี้

$$w(x, y, t) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} F(i)x^i \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} H(j)y^j \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} G(k)t^k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} W_k(x, y)t^k \quad (7)$$

เมื่อ $W_k(x, y)$ ถูกเรียกว่า t-dimensional spectrum function ของพื้นฐานนิยามของการลดชั้นการแปลงเชิงอนุพันธ์ดังนี้

นิยามที่ 3 ถ้าฟังก์ชัน $w(x, y, t)$ วิเคราะห์ความต่อเนื่องเวลาของ t ภายใต้โดเมนที่เราพิจารณา กำหนดโดย

$$W_k(x, y) = \frac{1}{k!} \left[\frac{\partial^k}{\partial t^k} w(x, y, t) \right]_{t=0} \quad (8)$$

เมื่อ t-dimensional spectrum function $W_k(x, y)$ คือ การแปลงฟังก์ชัน $w(x, y, t)$ แทนฟังก์ชันเริ่มต้น และ $W_k(x, y)$ หมายถึง ฟังก์ชันแปลงเชิงอนุพันธ์

นิยามที่ 4 การแปลงผกผันเชิงอนุพันธ์ $W_k(x, y)$ กำหนดโดย

$$w(x, y, t) = \sum_{k=0}^{\infty} W_k(x, y)t^k \quad (9)$$

รวมสมการ(8) และ(9) จะได้

$$w(x, y, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left[\frac{\partial^k w(x, y, t)}{\partial t^k} \right]_{t=0} t^k \quad (10)$$

จากสมการ(10) การลดชั้นการแปลงเชิงอนุพันธ์จะสามารถเขียนฟังก์ชันอยู่ในรูปอนุกรมกำลัง

ตารางที่1 การดำเนินการพื้นฐานสำหรับการลดชั้นการแปลงเชิงอนุพันธ์(RDTM)

รูปแบบฟังก์ชันพื้นฐาน	รูปแบบการลดชั้นการแปลงเชิงอนุพันธ์(RDTM)
$u(x, t)$	$\frac{1}{k!} \frac{\partial^k}{\partial t^k} w(x, y, t) \Big _{t=0}$
$u(x, t) = w(x, t) \pm v(x, t)$	$U_k(x) = W_k(x) \pm V_k(x)$
$u(x, t) = \alpha w(x, t)$	$U_k(x) = \alpha W_k(x)$ เมื่อ α เป็นค่าคงตัว
$u(x, t) = x^m t^n$	$U_k(x) = x^m \delta(k-n), \delta(k) = \begin{cases} 1, k=0 \\ 0, k \neq 0 \end{cases}$
$u(x, t) = x^m t^n w(x, y, t)$	$U_k(x) = x^m W(k-n)$
$u(x, t) = w(x, t)v(x, t)$	$U_k(x) = \sum_{r=0}^k W_r(x)V_{k-r}(x) = \sum_{r=0}^k V_r(x)W_{k-r}(x)$
$u(x, t) = \frac{\partial^r}{\partial t^r} w(x, t)$	$U_k(x) = (k+1) \dots (k+r) W_{k+r}(x) = \frac{(k+r)!}{k!} W_{k+r}(x)$

รูปแบบฟังก์ชันพื้นฐาน	รูปแบบการลดชั้นการแปลงเชิงอนุพันธ์(RDTM)
$u(x,t) = \frac{\partial}{\partial x} w(x,t)$	$U_k(x) = \frac{\partial}{\partial x} W_k(x)$
$u(x,t) = \frac{\partial}{\partial x^2} w(x,t)$	$U_k(x) = \frac{\partial}{\partial x^2} W_k(x)$

วิธีการดำเนินงานวิจัย

ในส่วนนี้แสดงการประมาณค่าผลเฉลยด้วย RDTM ในรูปแบบของการหาค่าสมการการเคลื่อนที่ของเมมเบรน, สมการที่มีพจน์การหน่วง สมการที่มีพจน์การหน่วงกับแรงภายนอก และสมการที่มีแรงภายนอกมากระทำ

ตัวอย่างที่ 3.1 พิจารณาสมการการเคลื่อนที่ของเมมเบรน Rao, S. (2004)

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (11)$$

เงื่อนไขเริ่มต้น

$$\begin{aligned} w(x, y, 0) &= \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, \\ \frac{\partial w}{\partial t}(x, y, 0) &= 0, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \end{aligned} \quad (12)$$

ขอบเขตเริ่มต้น

$$\begin{aligned} w(x, 0, t) &= 0, 0 \leq x \leq 1, \\ w(0, y, t) &= 0, 0 \leq y \leq 1, \\ w(x, 1, t) &= 0, 0 \leq x \leq 1, \\ w(1, y, t) &= 0, 0 \leq y \leq 1, t \in R \end{aligned} \quad (13)$$

เปรียบเทียบกับ (11) ในรูปแบบ RDTM จากตารางที่ 1 จะได้

$$(k+1)(k+2)W_{k+2}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} W_k(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} W_k(x, y) \quad (14)$$

จาก (12) จะได้

$$W_0 = \sin \pi x \sin \pi y, W_1 = 0 \quad (15)$$

นำ (15) มาแทนค่า (14) เมื่อ $k = 0$ จะได้

$$\begin{aligned} (0+1)(0+2)W_2(x, y) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} W_0(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} W_0(x, y) \\ (1)(2)W_2(x, y) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sin \pi x \sin \pi y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\sin \pi x \sin \pi y) \\ W_2(x, y) &= (-\pi^2)(\sin \pi x \sin \pi y). \end{aligned}$$

แทนค่า $k = 1, k = 2, k = 3, \dots$ จะได้

$$W_3(x, y) = 0,$$

$$W_4(x, y) = \left(\frac{\pi^4}{6}\right)(\sin \pi x \sin \pi y),$$

$$W_5(x, y) = 0, \dots$$

ใช้การแปลงผกผันเชิงอนุพันธ์ด้วย RDTM ของ $W_k(x, y)$ เราจะได้ผลเฉลยดังนี้

$$w(x, y, t) = \left[1 - \pi^2 t^2 + \frac{\pi^4}{6} t^4 + \frac{\pi^6}{90} t^6 + \dots \right] (\sin \pi x \sin \pi y) \quad (16)$$

ตัวอย่างที่ 3.2 พิจารณาสมการการเคลื่อนที่ของเมมเบรนที่มีพจน์การหน่วง(with damping term)

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial w}{\partial t} \quad (17)$$

เปรียบเทียบกับ (17) ในรูปแบบ RDTM จากตารางที่ 1 จะได้

$$\begin{aligned} & (k+1)(k+2)W_{k+2}(x, y) \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} W_k(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} W_k(x, y) - (k+1)W_{k+1}(x, y) \end{aligned} \quad (18)$$

นำ (15) มาแทนค่า (18) เมื่อ $k=0, k=1, k=2, k=3, \dots$ จะได้

$$W_2(x, y) = (-\pi^2)(\sin \pi x \sin \pi y),$$

$$W_3(x, y) = \left(\frac{\pi^2}{3}\right)(\sin \pi x \sin \pi y),$$

$$W_4(x, y) = (2\pi^4 - \pi^2)(\sin \pi x \sin \pi y),$$

$$W_5(x, y) = \left(\frac{\pi^2}{60} - \frac{\pi^4}{15}\right)(\sin \pi x \sin \pi y), \dots$$

ใช้การแปลงผกผันเชิงอนุพันธ์ด้วย RDTM ของ $W_k(x, y)$ เราจะได้ผลเฉลยดังนี้

$$\begin{aligned} w(x, y, t) &= \left[1 + (-\pi^2)t^2 + \left(\frac{\pi^2}{3}\right)t^3 + \left(\frac{\pi^4}{6} - \frac{\pi^2}{12}\right)t^4 \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\pi^2}{60} + \frac{\pi^4}{15}\right)t^5 + \dots \right] (\sin \pi x \sin \pi y) \end{aligned} \quad (19)$$

ตัวอย่างที่ 3.3 พิจารณาสมการการเคลื่อนที่ของเมมเบรนที่มีพจน์การหน่วงกับแรงภายนอกมากระทำ (w) (with damping term and external force)

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial w}{\partial t} + w. \quad (20)$$

เปรียบเทียบกับ (20) ในรูปแบบวิธี RDTM จากตารางที่ 1 จะได้

$$(k+1)(k+2)W_{k+2}(x, y)$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x^2} W_k(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} W_k(x, y) - 2(k+1)W_{k+1}(x, y) + W_k(x, y) \quad (21)$$

นำ (15) มาแทนค่า (21) เมื่อ $k=0, k=1, k=2, k=3, \dots$ จะได้

$$W_2(x, y) = (-\pi^2 + 1)(\sin \pi x \sin \pi y),$$

$$W_3(x, y) = \left(\frac{2\pi^2}{3} - 1\right)(\sin \pi x \sin \pi y),$$

$$W_4(x, y) = \left(\frac{\pi^4}{6} - \frac{\pi^2}{2} + \frac{1}{8}\right)(\sin \pi x \sin \pi y),$$

$$W_5(x, y) = \left(\frac{2\pi^2}{15} + \frac{1}{30}\right)(\sin \pi x \sin \pi y), \dots$$

ใช้การแปลงผกผันเชิงอนุพันธ์ด้วย RDTM ของ $W_k(x, y)$ เราจะได้ผลเฉลยดังนี้

$$w(x, y, t) = \left[1 + (-\pi^2)t^2 + \left(\frac{\pi^2}{3}\right)t^3 + \left(\frac{\pi^4}{6} - \frac{\pi^2}{12}\right)t^4 + \left(\frac{\pi^2}{60} + \frac{\pi^4}{15}\right)t^5 + \dots \right] (\sin \pi x \sin \pi y) \quad (22)$$

ตัวอย่างที่ 3.4

พิจารณาสมการการเคลื่อนที่ของเมมเบรนที่มีแรงภายนอกกระทำ (w^2)

(with external force)

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - w^2 \quad (23)$$

เปรียบเทียบกับ (23) ในรูปแบบ RDTM จากตารางที่ 1 จะได้

$$(k+1)(k+2)W_{k+2}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} W_k(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} W_k(x, y) - \sum_{r=0}^k W_r(x, y)W_{k-r}(x, y) \quad (24)$$

นำ (15) มาแทนค่า (24) เมื่อ $k=0, k=1, k=2, k=3, \dots$ จะได้

$$W_2(x, y) = -\left[\frac{(\sin \pi x \sin \pi y)(2\pi^2 + \sin \pi x \sin \pi y)}{2} \right],$$

$$W_3(x, y) = 0,$$

$$W_4(x, y) = \left[\frac{\sin(\pi x)^3 \sin(\pi y)^3}{12} \right] - \left[\frac{\pi^2 \sin(\pi y)^2 + \pi^2 \sin(\pi x)^2}{12} \right] + \left[\frac{\pi^2 \sin(\pi x)^2 \sin(\pi y)^2}{2} \right] + \left[\frac{\pi^4 \sin(\pi x) \sin(\pi y)}{6} \right],$$

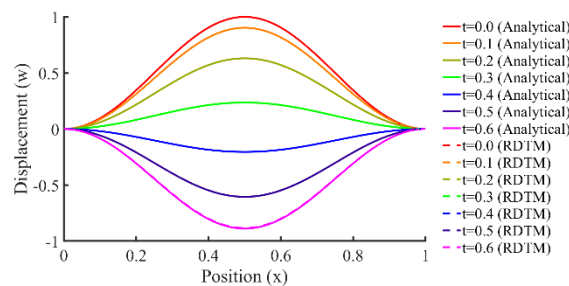
$$W_5(x, y) = 0, \dots$$

ใช้การแปลงผกผันเชิงอนุพันธ์ด้วย RDTM ของ $W_k(x, y)$ เราจะได้ผลเฉลยดังนี้

$$\begin{aligned}
 w(x, y, t) = & \sin \pi x \sin \pi y - \left[\frac{(\sin \pi x \sin \pi y)(2\pi^2 + \sin \pi x \sin \pi y)}{2} \right] t^2 \\
 & + \left[\left(\frac{\sin(\pi x)^3 \sin(\pi y)^3}{12} \right) - \left(\frac{\pi^2 \sin(\pi y)^2 + \pi^2 \sin(\pi x)^2}{12} \right) \right. \\
 & \left. + \left(\frac{\pi^2 \sin(\pi x)^2 \sin(\pi y)^2}{2} \right) + \left(\frac{\pi^4 \sin(\pi x) \sin(\pi y)}{6} \right) \right] t^4 \\
 & + \dots
 \end{aligned} \tag{25}$$

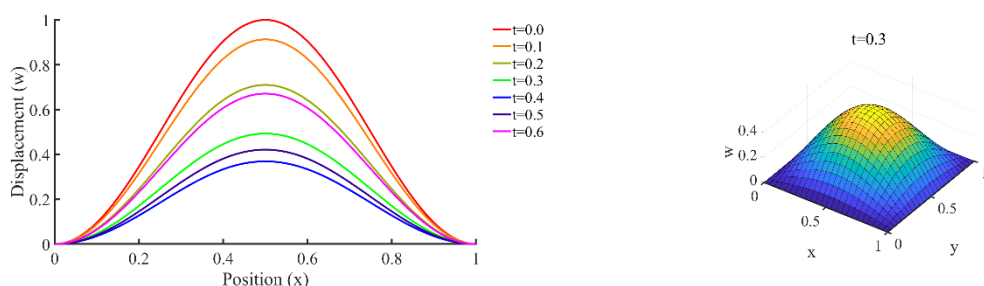
ผลการวิจัย

ต่อไปนี้เป็นารแสดงผลด้วยกราฟจากตัวอย่างที่ 3.1-3.4 โดยในรูปที่ 1 จะเป็นการแสดงผลเปรียบเทียบผลเฉลยวิเคราะห์ (analytical solution) ของสมการการเคลื่อนที่ของเมมเบรน(4) กับผลเฉลยประมาณค่าด้วยRDTM จากตัวอย่างที่ 1 จะเห็นได้ว่ากราฟทับกันสนิทพอดี แสดงว่า การหาผลเฉลยแบบประมาณค่าด้วยRDTM สามารถหาผลเฉลยได้อย่างแม่นยำ โดยแสดงค่าในตารางที่ 2

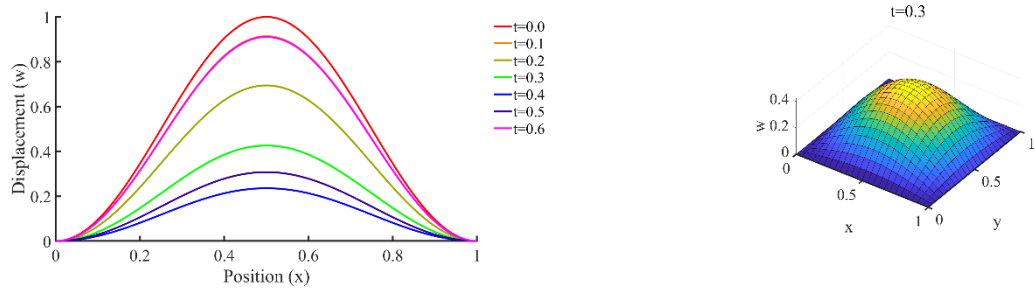


รูปที่ 1 กราฟแสดงการเปรียบเทียบระหว่างแอมพลิจูดของกราฟผลเฉลยวิเคราะห์กับกราฟผลเฉลยประมาณค่าด้วยวิธี RDTM

การประมาณค่าผลเฉลยด้วยRDTM ของสมการการเคลื่อนที่ของเมมเบรนที่มีพจน์การหน่วงในตัวอย่างที่ 3.2 แสดงผลในรูปที่ 2 และการประมาณค่าผลเฉลยด้วยRDTM สมการการเคลื่อนที่ของเมมเบรนที่มีพจน์การหน่วงกับแรงภายนอกมากระทำ (w) ในตัวอย่างที่ 3.3 แสดงผลในรูปที่ 3 พบว่า เมื่อเราเพิ่มพจน์การหน่วงเพิ่มขึ้นและมีแรงภายนอกมากระทำ จะทำให้แอมพลิจูดของกราฟลดลง เปรียบเทียบจากรูปที่ 2 และรูปที่ 3 และแสดงค่าในตารางที่ 3

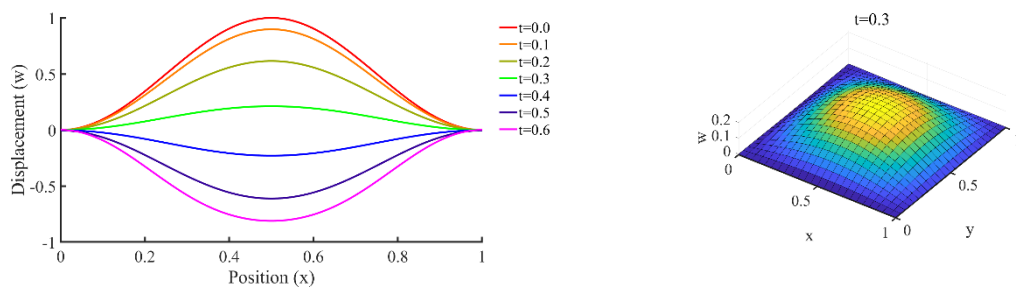


รูปที่ 2 กราฟสมการการเคลื่อนที่ของเมมเบรนที่มีพจน์การหน่วงด้วยวิธี RDTM



รูปที่ 3 กราฟสมการการเคลื่อนที่ของเมมเบรนที่มีพจน์การหน่วงกับแรงภายนอกมากระทำ (w) ด้วย RDTM

เมื่อเราเพิ่มพจน์ที่มีแรงภายนอกมากระทำ (w^2) แต่ไม่มีพจน์การหน่วงแสดงในตัวอย่างที่ 3.4 การแสดงผลของกราฟรูปที่ 4 แอมพลิจูดจะลดลงกว่ากราฟสมการการเคลื่อนที่ของเมมเบรนที่มีแรงภายนอกมากระทำในตัวอย่างที่ 3.1 และแสดงค่าในตารางที่ 4



รูปที่ 4 กราฟสมการการเคลื่อนที่ของเมมเบรนที่มีแรงภายนอกมากระทำ (w^2) ด้วย RDTM

ตารางที่ 2 ค่าของผลเฉลยวิเคราะห์ (analytical solution), ผลเฉลยประมาณค่าด้วย RDTM และ ค่าความคลาดเคลื่อน เมื่อ $x = 0.25, y = 0.25$

$time(sec)$	$w(analytic)$	$w(RDTM)$	$ w(exact) - w(RDTM) $
t=0.0	0.500000	0.500000	0.000000
t=0.1	0.451458	0.451458	0.000000
t=0.2	0.315259	0.315259	0.000000
t=0.3	0.117846	0.117849	0.000002
t=0.4	-0.102448	-0.102405	0.000042
t=0.5	-0.302850	-0.302461	0.000389
t=0.6	-0.444449	-0.442081	0.002367

ตารางที่ 3 ค่าของผลเฉลยประมาณค่า RDTM, RDTM with damping, RDTM with damping + external force และค่าความคลาดเคลื่อน เมื่อ $x = 0.25, y = 0.25$

$time(sec)$	$w(RDTM)$	$w(damping)$	$w(damping + ext.)$	$ w(RDTM) - w(damping) $	$ w(RDTM) - w(damping + ext.) $
t=0.0	0.500000	0.500000	0.500000	0.000000	0.000000
t=0.1	0.451458	0.456554	0.456856	0.000509	0.000539
t=0.2	0.315259	0.354950	0.347160	0.039691	0.031901
t=0.3	0.117849	0.246386	0.213073	0.128537	0.095224
t=0.4	-0.102405	0.184403	0.117779	0.286808	0.220184
t=0.5	-0.302461	0.210517	0.153754	0.512978	0.456215
t=0.6	-0.442081	0.335447	0.455315	0.777528	0.897396

ตารางที่ 4 ค่าของผลเฉลยประมาณค่า RDTM, RDTM with external force และค่าความคลาดเคลื่อน เมื่อ $x = 0.25, y = 0.25$

$time(sec)$	$w(RDTM)$	$w(ext.(w^2))$	$ w(RDTM) - w(ext.(w^2)) $
t=0.0	0.500000	0.500000	0.000000
t=0.1	0.451458	0.456856	0.005398
t=0.2	0.315259	0.347160	0.031901
t=0.3	0.117849	0.213073	0.012881
t=0.4	-0.102405	0.117779	0.220184
t=0.5	-0.302461	0.153754	0.456215
t=0.6	-0.442081	0.455315	0.897396

สรุปผลการวิจัย

เมื่อพิจารณารูปและค่าจากตาราง เราพบว่า RDTM มีประสิทธิภาพในการหาผลเฉลยประมาณค่าของสมการการเคลื่อนที่ของเมมเบรนได้อย่างแม่นยำซึ่งเปรียบเทียบกับกราฟผลเฉลยวิเคราะห์แล้วค่าความคลาดเคลื่อนน้อยมาก ดังนั้นเมื่อพิจารณารูปที่มีพจน์การหน่วง และพจน์การหน่วงกับแรงภายนอกจะพบว่า แอมพลิจูดของกราฟลดลงอย่างเห็นได้ชัด แต่เมื่อเราเพิ่มพจน์ที่มีแรงภายนอกอย่างเดียว แอมพลิจูดของกราฟมีค่าลดลงเช่นกัน

References

- Kothandapani, J., & Bharathi, V. (2016). Numerical approximation of nonlinear fractional differential-difference equations by using Modified He-Laplace method. *Alexandria Engineering Journal*, 55, 645-651.
- Singh, J., Rashidi, M., Sushila, M., & Kumar, D. (2017). A hybrid computational approach for Jeffery-Hamel flow in non-parallel walls. *Neural Computing and Applications*. Doi:10.1007/s00521-017-3198-y.
- Zedan, A., & AliAlghamdi, M. (2012). Solution of (3+1)-Dimensional nonlinear cubic Schrodinger equation by differential transform method. *Mathematical Problem in Engineering*. Doi:1155/2021/531823.
- Mirzaee, F., & Yari, M.K. (2015). A novel computing three-dimension differential transform method for solving

- fuzzy partial differential equations. *Aim Shams Engineering Journal*, 7(2), 695-708.
- Yildiray, K., Ibrahim, C., & Ayse Betul, K. (2011). Numerical solution of sine-gordon equation by reduced differential transform method. *Proceedings of the World Congress on Engineering 2011 Vol 1*. London, U.K.
- Vineet, K., Mukesh, K., & Chaurasia, R.K. (2014). Reduced differential transform method to solve two and three dimension second order hyperbolic telegraph equations. *Journal of King Saud University – Engineering Sciences*, 29(2), 166-171.
- Yildiray, K., & Galip, O. (2010). Reduced differential transform method for generalized KDV equations. *Mathematical and Computational Applications*, 15(3), 382-293.
- Saravanan, A., & Magesh, N. (2013). A comparison between the reduced differential transform method and the adomain decomposition method for the Newell – Whitehead – Segel equations. *Journal of the Egyptian Mathematical Society*, 21, 259-265.
- Mohammed, O. Al-Amr. (2014). New applications of reduced differential transform method. *Alexandria Engineering Journal*, 53, 243-247.
- Vineet, K. Mukesh, K., & Kumar, S. (2014). Analytical approximations of two and three-dimensional time-fractional telegraphic equation by reduced differential transform method. *Egyptian Journal of Basic and Applied Sciences*, 60-66.
- Vineet, K. Mishra, N. Kumar, S. Kumar, B., & Mukesh, K. (2014). Reduced differential transform method for solving $(1+n)$ – Dimensional Burgers’ equation. *Egyptian Journal of Basic and Applied Sciences*, 115 - 119.
- Taghavi, A. Babaei, A., & Mohammadpour, A. (2015). Application of reduced differential transform method for solving nonlinear reaction-diffusion-convection problems. *Applications and Applied Mathematics*, 10(1), 162-170.
- Mohamed, S., & Khaled, A. (2017). Reduced differential transform method for nonlinear integral member of kadmetsv-petviashvili hierarchy differential equation. *Journal of the Egyptian Mathematical Society*, 25, 1-7.
- Elsaid, A., & Helal, S.M. (2020). A new algorithm for computing the differential transform in nonlinear two-dimensional partial differential equation. *Journal of King Saud University-science*, 32, 858-861.
- Timilehin, K.A., & Adedapo, C.L. (2021). A solitary wave solution to the generalized burgers-fisher’s equation using an improved differential transform method: A hybrid scheme approach. *Heliyon*, 7, e07001.
- Mansilp, K., & Kasemsuwan, J. (2019). Differential transform method for vibration of membranes. *Songklanakarinn Journal Science and Technology*, 41(4), 716-726.
- Rao, S. (2004). *Mechanical vibrations*. Upper Saddle River, NJ, Prentice Hall.