

Received: Feb 11, 2025

Revised: Jun 19, 2025

Accepted: Jun 21, 2025

การทำให้เป็นเชิงเส้นของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสองโดยใช้การแปลงเชิงเส้นทั่วไป LINEARIZATION OF SECOND-ORDER ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS BY USING A GENERALIZED LINEARIZING TRANSFORMATION

ศุภกิจ ธรรมชันธ์* กิตติ ศศิวิมลลักษณ์

คณะแพทยศาสตร์วันออก วิทยาลัยเชียงราย

Supakit Tammakun* Kitti Sasivimonlux

^{1,2}Faculty of Oriental Medicine, Chiang Rai CollegeCorresponding Author: e-mail ^{1*}supakit.tammakun@crc.ac.th

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาปัญหาการทำให้เป็นเชิงเส้นของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสองที่ไม่เชิงเส้น โดยใช้การแปลงเชิงเส้นทั่วไปเพื่อลดรูปให้อยู่ในรูปเชิงเส้น $X'' + \alpha X = 0$ พร้อมกำหนดเงื่อนไขที่จำเป็นและเงื่อนไขที่เพียงพอสำหรับการแปลงดังกล่าว รวมถึงนำเสนอขั้นตอนการหาฟังก์ชันการแปลงและสัมประสิทธิ์ของสมการเชิงเส้น ตลอดจนยกตัวอย่างการหาผลเฉลยเพื่อประกอบแนวคิดที่เสนอ

คำสำคัญ: ปัญหาการทำให้เป็นเชิงเส้น การแปลงเชิงเส้นทั่วไป สมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสองที่ไม่เชิงเส้น

Abstract

This research aimed to study the linearization problem of nonlinear second-order ordinary differential equations by using a generalized linearizing transformation to reduce the equation into the linear form $X'' + \alpha X = 0$. The study establishes the necessary and sufficient conditions for such a transformation, presents a procedure to determine the transformation functions and the coefficients of the linear equation, and provides examples of obtaining solutions to illustrate the proposed concepts.

Keywords: Linearization problem, Generalized linearizing transformation, Nonlinear second-order ordinary differential equations

บทนำ

นักคณิตศาสตร์ร่วมมือกับนักวิทยาศาสตร์ วิศวกร และนักวิจัยจากหลากหลายสาขาวิชาในการพัฒนาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เพื่ออธิบายและคาดการณ์ปัญหาในโลกความเป็นจริง รวมถึงปรากฏการณ์ทางกายภาพที่หลากหลาย เช่น การสลายตัวของสารกัมมันตรังสี กฎการเย็นตัวของนิวตัน ปฏิกริยาเคมี การแพร่กระจายของเชื้อโรค การพยากรณ์อากาศ วงจรไฟฟ้า และประเด็นทางเศรษฐศาสตร์ โดยอาศัยสมการเชิงอนุพันธ์ รวมถึงสมการเชิงอนุพันธ์สามัญไม่เชิงเส้น (nonlinear

ordinary differential equations) ในการจำลองปรากฏการณ์ดังกล่าว อย่างไรก็ตาม การแก้ปัญหาที่อยู่ในรูปแบบไม่เชิงเส้นเป็นเรื่องที่ยาก ด้วยเหตุนี้ นักคณิตศาสตร์จึงดำเนินการวิจัยอย่างต่อเนื่องเพื่อพัฒนาวิธีการและแนวทางในการแก้ปัญหาเหล่านี้

เป็นเวลากว่าศตวรรษที่นักคณิตศาสตร์ให้ความสนใจในปัญหาการทำให้เป็นเชิงเส้น (linearization problem) ซึ่งนักคณิตศาสตร์ที่มีชื่อเสียง เช่น Lie และ Cartan ได้ทุ่มเทความพยายามในการศึกษาปัญหาดังกล่าว โดย Lie เป็นผู้เริ่มต้นในการวิเคราะห์ปัญหาการทำให้เป็นเชิงเส้นสำหรับสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสอง เขาได้ค้นพบรูปแบบมาตรฐานของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสองที่สามารถแปลงให้เป็นสมการเชิงเส้นได้ผ่านการเปลี่ยนตัวแปรอิสระและตัวแปรตาม ซึ่งวิธีการนี้เรียกว่า "การแปลงแบบจุด" (point transformation) นอกจากนี้ Lie ยังได้ค้นพบว่า ทุกสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสองสามารถลดรูปให้เป็นสมการเชิงเส้นได้โดยไม่จำเป็นต้องมีเงื่อนไขใด ๆ ผ่านการใช้การแปลงแบบคอนแทค (Lie, 1883) ในเวลาต่อมา Liouville และ Tresse ได้นำแนวคิดเรื่องตัวแปรเชิงสัมพัทธ์ (relative invariants) ของกลุ่มสมมูลมาใช้เพื่อวิเคราะห์ความสมมูลของสมการภายใต้การแปลงแบบจุด ซึ่งช่วยให้สามารถลดรูปสมการที่ไม่เป็นเชิงเส้นให้อยู่ในรูปเชิงเส้นได้ (Liouville, 1889; Tresse, 1896)

นอกเหนือจากวิธีการที่กล่าวมาแล้ว ยังมีเทคนิคอื่นที่สามารถนำมาใช้ในการแก้ปัญหาการทำให้เป็นเชิงเส้นของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสอง หนึ่งในนั้นคือการประยุกต์ใช้เรขาคณิตเชิงอนุพันธ์ (differential geometry) ซึ่งพัฒนาโดย Cartan (Cartan, 1924) อีกวิธีที่ได้รับความนิยมคือการแปลงแบบซันด์แมนทั่วไป (generalized Sundman transformation) โดย Duarte, Moreira และ Santos ได้ประยุกต์ใช้รูปแบบบัญญัติของลาเกอแร (Laguerre form) ร่วมกับการแปลงนี้ เพื่อหาวิธีลดรูปสมการให้เป็นสมการเชิงเส้นอย่างง่าย พร้อมทั้งเสนอเงื่อนไขจำเป็นและเพียงพอสำหรับการแปลงดังกล่าว (Duarte, Moreira, & Santos, 1994) อย่างไรก็ตาม Nakpim และ Meleshko พบว่ารูปแบบบัญญัติของลาเกอแรไม่เพียงพอต่อการแก้ปัญหาการทำให้เป็นเชิงเส้นโดยการใช้การแปลงแบบซันด์แมนทั่วไป เนื่องจากรูปแบบดังกล่าวใช้ได้เฉพาะกับการแปลงแบบจุดและแบบคอนแทคเท่านั้น ดังนั้นพวกเขาจึงได้เสนอเงื่อนไขใหม่สำหรับการทำให้สมการอยู่ในรูปเชิงเส้นทั่วไป (Nakpim & Meleshko, 2010)

อีกหนึ่งแนวทางในการแก้ปัญหาการทำให้เป็นเชิงเส้นของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสอง คือ การแปลงเชิงเส้นทั่วไป (generalized linearizing transformation) ซึ่งเป็นการขยายแนวคิดจากการแปลงแบบซันด์แมนทั่วไป วิธีการนี้ได้นำเสนอในงานวิจัยของ Chandrasekar, Senthilvelan และ Lakshmanan โดยพวกเขาได้ค้นพบรูปแบบและเงื่อนไขสำหรับการทำให้เป็นเชิงเส้นของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสองในกรณี $F_x \neq 0$ (Chandrasekar, Senthilvelan, & Lakshmanan, 2006) ต่อมา Voraka, Suksern และ Donjiwprai ได้นำแนวคิดนี้มาประยุกต์ในกรณี $F_x = 0$ เพื่อหาเงื่อนไขที่ทำให้สมการเชิงอนุพันธ์อันดับสองลดรูปเป็นสมการเชิงเส้นอย่างง่าย (Voraka, Suksern, & Donjiwprai, 2020) ในปัจจุบันการวิจัยเกี่ยวกับการทำให้เป็นเชิงเส้นของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสองโดยใช้การแปลงเชิงเส้นทั่วไปยังคงมีอยู่ในวงจำกัด ดังนั้น งานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาปัญหาการทำให้เป็นเชิงเส้นของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสองที่ไม่เชิงเส้น โดยใช้การแปลงเชิงเส้นทั่วไปเพื่อลดรูปให้อยู่ในรูปเชิงเส้น $X'' + \alpha X = 0$ พร้อมกำหนดเงื่อนไขที่จำเป็นและเงื่อนไขที่เพียงพอสำหรับการแปลงดังกล่าว รวมถึงนำเสนอขั้นตอนการหาฟังก์ชันการแปลงและสัมประสิทธิ์ของสมการเชิงเส้น ตลอดจนยกตัวอย่างการหาผลเฉลยเพื่อประกอบแนวคิดที่เสนอ

เงื่อนไขที่จำเป็นสำหรับการทำให้เป็นเชิงเส้น (Necessary Conditions)

การศึกษานี้เริ่มต้นด้วยการวิเคราะห์เงื่อนไขที่จำเป็นสำหรับการแปลงสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสองทั่วไปในรูป

$$x'' = f(t, x, x') \quad (1)$$

ให้เป็นสมการเชิงเส้นในรูปแบบ

$$X'' + \alpha X = 0 \quad (2)$$

โดยใช้การแปลงเชิงเส้นทั่วไป

$$\begin{aligned} X &= F(t, x), \\ dT &= [G_1(t, x)x' + G_2(t, x)]dt \end{aligned} \quad (3)$$

เมื่อ $G_1 \neq 0$ และ α คือค่าคงที่ ภายใต้เงื่อนไขดังกล่าว สามารถสรุปได้เป็นทฤษฎีบทดังนี้

ทฤษฎีบทที่ 1 สมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสองใด ๆ ที่สามารถแปลงให้อยู่ในรูปเชิงเส้นได้โดยใช้การแปลงเชิงเส้นทั่วไป จะต้องอยู่ในรูปแบบต่อไปนี้

$$x'' + A_3(t, x)x'^3 + A_2(t, x)x'^2 + A_1(t, x)x' + A_0(t, x) = 0 \quad (4)$$

โดยที่

$$A_3 = (-F_{xx}G_1 + F_xG_{1x} - \alpha FG_1^3)/(F_tG_1 - F_xG_2), \quad (5)$$

$$A_2 = (-2F_{tx}G_1 + F_tG_{1x} - F_{xx}G_2 + F_xG_{1t} + F_xG_{2x} - 3\alpha FG_1^2G_2)/(F_tG_1 - F_xG_2), \quad (6)$$

$$A_1 = (-2F_{tx}G_2 - F_{tt}G_1 + F_tG_{1t} + F_tG_{2x} + F_xG_{2t} - 3\alpha FG_1G_2^2)/(F_tG_1 - F_xG_2), \quad (7)$$

$$A_0 = (-F_{tt}G_2 + F_tG_{2t} - \alpha FG_2^3)/(F_tG_1 - F_xG_2). \quad (8)$$

บทพิสูจน์ ในส่วนนี้จะทำการพิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 1 โดยแสดงให้เห็นถึงรูปแบบสมการที่สามารถแปลงเป็นเชิงเส้นได้ ผ่านการใช้การแปลงเชิงเส้นทั่วไป (3) เริ่มจากการคำนวณอนุพันธ์อันดับหนึ่งและอันดับสองของ $X = F(t, x)$ ดังนี้

$$\begin{aligned} X'(T) &= \frac{D_t F}{D_t \int [G_1 x' + G_2] dt} \\ &= \frac{F_t + x' F_x}{G_1 x' + G_2} \\ &= P(t, x, x'), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X''(T) &= \frac{D_t P}{D_t \int [G_1 x' + G_2] dt} \\ &= \frac{P_t + x' P_x + x'' P_{x'}}{G_1 x' + G_2}, \end{aligned}$$

เมื่อ

$$P_t = \frac{F_{tt}(G_1 x' + G_2) - F_t(G_{1t} x' + G_{2t}) - F_x x'(G_{1t} x' + G_{2t})}{(G_1 x' + G_2)^2},$$

$$P_x = \frac{2F_{tx}(G_1 x' + G_2) + F_{xx} x'(G_1 x' + G_2) - F_t(G_{1x} x' + G_{2x}) - F_x x'(G_{1x} x' + G_{2x})}{(G_1 x' + G_2)^2},$$

$$P_{x'} = \frac{-F_t G_1 + F_x G_2}{(G_1 x' + G_2)^2}$$

และ $D_t = \frac{\partial}{\partial t} + x' \frac{\partial}{\partial x} + x'' \frac{\partial}{\partial x'} + \dots$ คืออนุพันธ์รวม (Total derivative)

เมื่อแทนค่า X และ X'' ลงในสมการเชิงเส้น (2) และทำการจัดรูปสมการ จะได้

$$x'' + \frac{(-F_{xx}G_1 + F_xG_{1x} - \alpha FG_1^3)}{(F_tG_1 - F_xG_2)}x'^3 + \frac{(-2F_{tx}G_1 + F_tG_{1x} - F_{xx}G_2 + F_xG_{1t} + F_xG_{2x} - 3\alpha FG_1^2G_2)}{(F_tG_1 - F_xG_2)}x'^2 \\ + \frac{(-2F_{tx}G_2 - F_{tt}G_1 + F_tG_{1t} + F_tG_{2x} + F_xG_{2t} - 3\alpha FG_1G_2^2)}{(F_tG_1 - F_xG_2)}x' + \frac{(-F_{tt}G_2 + F_tG_{2t} - \alpha FG_2^3)}{(F_tG_1 - F_xG_2)} = 0.$$

ทำการกำหนดค่าของ A_3, A_2, A_1 และ A_0 ตามสมการ (5)–(8) จากนั้นสมการที่ได้จะมีรูปแบบที่เป็นไปตามเงื่อนไขที่จำเป็นดังแสดงในสมการ (4) ตามที่ระบุไว้ในทฤษฎีบทที่ 1 $\square$

เงื่อนไขที่เพียงพอสำหรับการทำให้เป็นเชิงเส้นและการแปลงเพื่อทำให้เป็นเชิงเส้น (Sufficient Conditions and Linearizing Transformation)

จากการวิเคราะห์สมการ (5)–(8) โดยอาศัยทฤษฎีความเข้ากันได้ (compatibility theory) สามารถสรุปเงื่อนไขที่เพียงพอสำหรับการทำให้สมการเป็นเชิงเส้นได้ ดังแสดงในทฤษฎีต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 2 เงื่อนไขที่เพียงพอสำหรับสมการ (4) ที่จะสามารถทำให้เป็นเชิงเส้นได้โดยใช้การแปลงเชิงเส้นทั่วไป (3) ภายใต้อนุพันธ์ $F_x = 0$ มีดังต่อไปนี้

(ก) กรณีที่ $A_3 \neq 0$ เงื่อนไขต้องสอดคล้องกับสมการ

$$A_{3xxx} = (-6A_{1x}A_3^4 + 2A_{2xx}A_3^3 - 5A_{2x}A_{3x}A_3^2 + 4A_{2x}A_2A_3^3 + 3A_{3tx}A_3^3 - 3A_{3t}A_{3x}A_3^2 \\ + 6A_{3xx}A_{3x}A_3 - 3A_{3xx}A_2A_3^2 - 6A_{3x}^3 + 6A_{3x}^2A_2A_3 - 2A_{3x}A_2^2A_3^2)/A_3^2, \quad (9)$$

$$A_{3tx} = (72A_{2t}A_3^4 + 12A_{2x}A_{3x}A_3^2 - 24A_{2x}A_2A_3^3 + 72A_{3t}A_{3x}A_3^2 - 72A_{3t}A_2A_3^3 - 6A_{3xx}A_{3x}A_3 \\ + 12A_{3xx}A_2A_3^2 + 11A_{3x}^3 - 36A_{3x}^2A_2A_3 - 36A_{3x}A_1A_3^3 + 36A_{3x}A_2^2A_3^2 - 216A_0A_3^5 \\ + 72A_1A_2A_3^4 - 16A_2^3A_3^3)/(36A_3^3), \quad (10)$$

$$A_{0xx} = (648A_{0t}A_3^8 - 216A_{0x}A_2A_3^7 + 216A_{1tx}A_3^7 + 108A_{1t}A_{3x}A_3^6 - 216A_{1t}A_2A_3^7 \\ - 72A_{1x}A_{2x}A_3^6 + 36A_{1x}A_{3xx}A_3^5 - 54A_{1x}A_{3x}^2A_3^4 + 36A_{1x}A_{3x}A_2A_3^5 + 216A_{1x}A_1A_3^7 \\ - 216A_{2tt}A_3^7 + 144A_{2t}A_{2x}A_3^6 - 72A_{2t}A_{3xx}A_3^5 + 108A_{2t}A_{3x}^2A_3^4 - 72A_{2t}A_{3x}A_2A_3^5 \\ - 216A_{2t}A_1A_3^7 + 72A_{2x}A_{3t}A_{3x}A_3^4 - 144A_{2x}A_{3t}A_2A_3^5 - 72A_{2x}A_{3x}A_1A_3^5 \\ - 648A_{2x}A_0A_3^7 + 144A_{2x}A_1A_2A_3^6 - 108A_{3tt}A_{3x}A_3^5 + 216A_{3tt}A_2A_3^6 \\ - 36A_{3t}A_{3xx}A_{3x}A_3^3 + 72A_{3t}A_{3xx}A_2A_3^4 + 36A_{3t}A_{3x}^3A_3^2 - 36A_{3t}A_{3x}^2A_2A_3^3 \\ + 108A_{3t}A_{3x}A_1A_3^5 - 144A_{3t}A_{3x}A_2^2A_3^4 + 1296A_{3t}A_0A_3^7 - 216A_{3t}A_1A_2A_3^6 \\ + 144A_{3t}A_2^3A_3^5 + 36A_{3xx}A_{3x}A_1A_3^4 + 216A_{3xx}A_0A_3^6 - 72A_{3xx}A_1A_2A_3^5 - A_{3x}^5 \\ + 10A_{3x}^4A_2A_3 - 36A_{3x}^3A_1A_3^3 - 40A_{3x}^3A_2^2A_3^2 - 216A_{3x}^2A_0A_3^5 + 36A_{3x}^2A_1A_2A_3^4 \\ + 80A_{3x}^2A_2^3A_3^3 - 216A_{3x}A_0A_2A_3^6 + 144A_{3x}A_1A_2^2A_3^5 - 80A_{3x}A_2^4A_3^4 + 432A_0A_2^2A_3^7 \\ - 144A_1A_2^3A_3^6 + 32A_2^5A_3^5)/(216A_3^7). \quad (11)$$

(ข) กรณีที่ $A_3 = 0$ และ $\lambda_1 = 0$ เงื่อนไขต้องสอดคล้องกับสมการ

$$\lambda_2 = 0. \quad (12)$$

(ค) กรณีที่ $A_3 = 0$ และ $\lambda_1 \neq 0$ เงื่อนไขต้องสอดคล้องกับสมการ

$$\lambda_{2x} = (-A_{2t}\lambda_1^2 + \lambda_{1x}\lambda_2 + \lambda_1^3)/\lambda_1, \quad (13)$$

$$\lambda_{2t} = (-A_{0x}\lambda_1^2 + \lambda_{1t}\lambda_2 - A_0A_2\lambda_1^2 - A_1\lambda_1\lambda_2 - \lambda_2^2)/\lambda_1, \quad (14)$$

เมื่อ

$$\lambda_1 = -A_{1x} + 2A_{2t},$$

$$\lambda_2 = -A_{0xx} - A_{0x}A_2 + A_{2tt} + A_{2t}A_1 - A_{2x}A_0 - \lambda_{1t} - A_1\lambda_1.$$

บทพิสูจน์ เริ่มต้นโดยการพิจารณาค่าสัมประสิทธิ์ A_3, A_2, A_1 และ A_0 ตามที่ระบุในทฤษฎีบทที่ 1 ซึ่งเกี่ยวข้องกับฟังก์ชันที่ไม่ทราบค่า F, G_1 และ G_2 เพื่อให้ง่ายต่อการคำนวณเราจึงกำหนดค่า $K(t, x) = -F_tG_1 + F_xG_2$ ซึ่งทำให้ได้ค่าอนุพันธ์ของ F_t คือ

$$F_t = (F_xG_2 - K)/G_1. \quad (15)$$

จากการแก้สมการ (5)-(8) เราสามารถหาค่าของ α, K_x, K_t และ G_{2t} ได้ดังต่อไปนี้

$$\alpha = (-F_{xx}G_1 + F_xG_{1x} + A_3K)/(FG_1^3), \quad (16)$$

$$K_x = (-F_xG_{1t}G_1 + F_xG_{2x}G_1 + 3G_{1x}K - A_2G_1K + 3A_3G_2K)/(2G_1), \quad (17)$$

$$K_t = (-F_xG_{1t}G_1G_2 + F_xG_{2x}G_1G_2 + 4G_{1t}G_1K - 3G_{1x}G_2K + 2G_{2x}G_1K - 2A_1G_1^2K + 3A_2G_1G_2K - 3A_3G_2^2K)/(2G_1^2), \quad (18)$$

$$G_{2t} = (G_{1t}G_1G_2 - G_{1x}G_2^2 + G_{2x}G_1G_2 + A_0G_1^3 - A_1G_1^2G_2 + A_2G_1G_2^2 - A_3G_2^3)/G_1^2. \quad (19)$$

จากนั้นนำค่า α จากสมการ (16) มาคำนวณอนุพันธ์ตามตัวแปร x จะได้

$$F_{xxx} = (2A_{3x}FG_1K + 2F_{xx}F_xG_1^2 + 6F_{xx}G_{1x}FG_1 - 2F_x^2G_{1x}G_1 - F_xG_{1t}A_3FG_1 + 2F_xG_{1xx}FG_1 - 6F_xG_{1x}^2F + F_xG_{2x}A_3FG_1 - 2F_xA_3G_1K - 3G_{1x}A_3FK - A_2A_3FG_1K + 3A_3^2FG_2K)/(2FG_1^2). \quad (20)$$

การเปรียบเทียบอนุพันธ์ผสม $(K_t)_x = (K_x)_t$ จะได้

$$\begin{aligned} G_{2xx} = & (2A_{0x}F_xG_1^4 - 2A_{1x}F_xG_1^3G_2 + 4A_{1x}G_1^3K - 2A_{2t}G_1^3K + 2A_{2x}F_xG_1^2G_2^2 - 6A_{2x}G_1^2G_2K \\ & + 6A_{3t}G_1^2G_2K - 2A_{3x}F_xG_1G_2^3 + 6A_{3x}G_1G_2^2K + 4F_xG_{1tx}G_1^2G_2 - 2F_xG_{1tt}G_1^3 \\ & + 3F_xG_{1t}^2G_1^2 - 8F_xG_{1t}G_{1x}G_1G_2 + 2F_xG_{1t}G_{2x}G_1^2 - 2F_xG_{1t}A_1G_1^3 + 4F_xG_{1t}A_2G_1^2G_2 \\ & - 6F_xG_{1t}A_3G_1G_2^2 - 2F_xG_{1xx}G_1G_2^2 + 4F_xG_{1x}^2G_2^2 + 2F_xG_{1x}A_0G_1^3 - 2F_xG_{1x}A_2G_1G_2^2 \\ & + 4F_xG_{1x}A_3G_2^3 - F_xG_{2x}^2G_1^2 - 2G_{1tx}G_1^2K + 3G_{1t}G_{1x}G_1K - G_{1t}A_2G_1^2K \\ & + 3G_{1t}A_3G_1G_2K + 6G_{1xx}G_1G_2K - 12G_{1x}^2G_2K + 9G_{1x}G_{2x}G_1K \\ & + 6G_{1x}A_2G_1G_2K - 18G_{1x}A_3G_2^2K - 5G_{2x}A_2G_1^2K + 15G_{2x}A_3G_1G_2K \\ & + 6A_0A_3G_1^3K - 6A_1A_3G_1^2G_2K + 6A_2A_3G_1G_2^2K - 6A_3^2G_2^3K)/(4G_1^2K). \end{aligned} \quad (21)$$

การวิเคราะห์ความเข้ากันได้ขึ้นอยู่กับค่าของ F_x ซึ่งการศึกษาทุกกรณีอย่างครบถ้วนอาจเป็นกระบวนการที่ซับซ้อน ในที่นี้เราจะนำเสนอผลลัพธ์ที่ครบถ้วนสำหรับกรณีที่ $F_x = 0$ โดยเฉพาะ

จาก $F_x = 0$ เราทำการเปรียบเทียบอนุพันธ์ผสม $(F_x)_t = (F_t)_x$ จะได้

$$G_{1x} = A_2 G_1 - 3A_3 G_2. \quad (22)$$

จากนั้นนำค่า α จากสมการ (16) มาคำนวณอนุพันธ์ตามตัวแปร t จะได้

$$A_{3t} F G_1^2 - G_{1t} A_3 F G_1 + G_{2x} A_3 F G_1 - A_1 A_3 F G_1^2 + 3A_3^2 F G_2^2 + A_3 G_1 K = 0. \quad (23)$$

การวิเคราะห์ความเข้ากันได้ขึ้นอยู่กับค่าของ A_3 ตามที่ระบุในสมการ (23) ซึ่งจะถูกแยกพิจารณาออกเป็นสองกรณี คือ $A_3 \neq 0$ และ $A_3 = 0$

กรณี (ก) $A_3 \neq 0$

แก้สมการ (23) จะได้

$$G_{2x} = (-A_{3t} F G_1^2 + G_{1t} A_3 F G_1 + A_1 A_3 F G_1^2 - 3A_3^2 F G_2^2 - A_3 G_1 K) / (A_3 F G_1). \quad (24)$$

ทำการแทนค่า $F_x = 0$ ลงใน F_{xxx} จากสมการ (20) จะได้

$$G_2 = G_1(-A_{3x} + 2A_2 A_3) / (6A_3^2). \quad (25)$$

ทำการแทนค่า G_2 จากสมการ (25) ลงใน G_{2x} จากสมการ (24) จะได้

$$G_{1t} = (2A_{2x} A_3^2 F G_1 + 6A_{3t} A_3^2 F G_1 - A_{3xx} A_3 F G_1 + 2A_{3x}^2 F G_1 - 3A_{3x} A_2 A_3 F G_1 - 6A_1 A_3^3 F G_1 + 2A_2^2 A_3^2 F G_1 + 6A_3^3 K) / (6A_3^3 F). \quad (26)$$

จากการเปรียบเทียบอนุพันธ์ผสม $(G_{1t})_x = (G_{1x})_t$, $(G_2)_{xx} = G_{2xx}$ และ $(G_{2xx})_t = (G_{2t})_{xx}$ นำไปสู่เงื่อนไข A_{3xxx} , A_{3tx} และ A_{0xx} ตามที่ระบุไว้ในสมการที่ (9)-(11) ของทฤษฎีบทที่ 2 และทำให้สมการ $(F_{xx})_t = (F_t)_{xx}$, $(G_{2x})_x = G_{2xx}$, $(G_{2x})_t = (G_{2t})_x$ และ $(G_2)_t = G_{2t}$ สอดคล้องกัน กล่าวคือ ทั้งสองข้างของสมการมีค่าเท่ากันและเป็นศูนย์ภายใต้เงื่อนไขที่กำหนด

กรณี (ข) $A_3 = 0$

เนื่องจาก $A_3 = 0$ ทำให้สมการ (23), $(F_{xx})_t = (F_t)_{xx}$ และ $(F_x)_{xx} = F_{xxx}$ นั้นมีความสอดคล้อง

จากนั้น การเปรียบเทียบอนุพันธ์ผสม $(G_{2xx})_t = (G_{2t})_{xx}$ จะได้

$$G_{2x} \lambda_1 + G_1 \lambda_2 = 0, \quad (27)$$

เมื่อ

$$\lambda_1 = -A_{1x} + 2A_{2t},$$

$$\lambda_2 = -A_{0xx} - A_{0x} A_2 + A_{2tt} + A_{2t} A_1 - A_{2x} A_0 - \lambda_{1t} - A_1 \lambda_1.$$

การวิเคราะห์ความเข้ากันได้ขึ้นอยู่กับค่าของ λ_1 ในสมการ (27) ซึ่งจะถูกแยกพิจารณาออกเป็นสองกรณี ได้แก่ $\lambda_1 = 0$ และ $\lambda_1 \neq 0$ ในที่นี้พิจารณากรณี $\lambda_1 = 0$ การแก้สมการ (27) จะนำไปสู่เงื่อนไขของ λ_2 ตามที่ระบุไว้ในสมการ (12) ของทฤษฎีบทที่ 2

กรณี (ค) $A_3 = 0$

จากเงื่อนไข $A_3 = 0$ และเนื่องจากการวิเคราะห์ความเข้ากันได้ของสมการ (27) ขึ้นอยู่กับค่าของ λ_1 ในที่นี้จึงพิจารณากรณีที่ $\lambda_1 \neq 0$ โดยการแก้สมการ (27) จะได้ว่า

$$G_{2x} = (-G_1\lambda_2)/\lambda_1. \quad (28)$$

จากการเปรียบเทียบอนุพันธ์ผสม $(G_2)_{xx} = G_{2xx}$ และ $(G_{2x})_t = (G_{2t})_x$ จะนำไปสู่เงื่อนไข λ_{2x} และ λ_{2t} ตามที่ระบุในสมการ (13) และ (14) ของทฤษฎีบทที่ 2 จึงสามารถสรุปได้ว่าทฤษฎีบทดังกล่าวได้รับการพิสูจน์เป็นที่เรียบร้อยแล้ว $\square$

จากกระบวนการพิสูจน์ข้างต้น ผลลัพธ์ที่ได้สามารถนำไปสู่การสรุปผลเป็นบทแทรกดังต่อไปนี้

บทแทรกที่ 3 ภายใต้เงื่อนไขที่เพียงพอตามทฤษฎีบทที่ 2 การแปลงเชิงเส้น (3) ที่ทำให้สมการ (4) ถูกแปลงเป็นสมการเชิงเส้น (2) สามารถหาได้โดยการแก้ระบบสมการที่เข้ากันได้สำหรับฟังก์ชัน $F = F(t)$, $G_1(t, x)$ และ $G_2(t, x)$ ดังต่อไปนี้

(ก) สมการ (15), (17), (18), (22), (25) และ (26)

(ข) สมการ (15), (17), (18), (19), (21) และ (22)

(ค) สมการ (15), (17), (18), (19), (22) และ (28)

สุดท้ายนี้ ค่าสัมประสิทธิ์ α ของสมการเชิงเส้น (2) จะถูกกำหนดโดยสมการ (16)

ตัวอย่าง

ในส่วนนี้จะนำเสนอตัวอย่างที่แสดงถึงการใช้ทฤษฎีบทที่ 1, ทฤษฎีบทที่ 2 และบทแทรกที่ 3 ซึ่งช่วยเสริมความเข้าใจในกระบวนการตรวจสอบเงื่อนไขที่จำเป็นและเงื่อนไขที่เพียงพอ ตลอดจนวิธีการหาฟังก์ชันการแปลงเชิงเส้นและสัมประสิทธิ์ของสมการเชิงเส้น เพื่อแปลงสมการไม่เชิงเส้นให้เป็นสมการเชิงเส้น พร้อมทั้งหาผลเฉลยของสมการนั้น

ตัวอย่างที่ 1 พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสองที่ไม่เป็นเชิงเส้น

$$x'' - tx'^3 = 0. \quad (29)$$

สมการ (29) เป็นสมการในรูปแบบที่ (4) ตามที่ได้ระบุไว้ในทฤษฎีบทที่ 1 โดยมีสัมประสิทธิ์ต่าง ๆ ดังต่อไปนี้

$$A_3 = -t, A_2 = 0, A_1 = 0, A_0 = 0.$$

สามารถตรวจสอบได้ว่าสัมประสิทธิ์เหล่านี้เป็นไปตามเงื่อนไขในทฤษฎีบทที่ 2 กรณี (ก) ดังนั้นสมการ (29) สามารถทำให้เป็นสมการเชิงเส้นได้โดยการแปลงเชิงเส้นทั่วไป สำหรับการหาฟังก์ชัน F , G_1 และ G_2 จำเป็นต้องทำการแก้สมการในบทแทรกที่ 3 กรณี (ก) ซึ่งจะได้ผลลัพธ์เป็น

$$F_t = \frac{-K}{G_1}, K_x = 0, K_t = \frac{2K(FG_1 + tK)}{tFG_1}, G_{1x} = 0, G_2 = 0, G_{1t} = \frac{FG_1 + tK}{tF}. \quad (30)$$

เราสามารถหาคำตอบเฉพาะของสมการใน (30) ได้ดังนี้

$$G_1 = 1, G_2 = 0, K = 1, F = -t.$$

ดังนั้นจึงได้การแปลงเชิงเส้นในรูปแบบ

$$X = -t, dT = x' dt. \quad (31)$$

และจากบทแทรกที่ 3 ค่าสัมประสิทธิ์ α ของสมการเชิงเส้น (2) คือ

$$\alpha = 1.$$

ดังนั้น สมการ (29) จะถูกแปลงโดยการแปลงเชิงเส้น (31) ให้กลายเป็นสมการเชิงเส้น

$$X'' + X = 0. \quad (32)$$

ซึ่งผลเฉลยทั่วไปของสมการ (32) คือ

$$X = c_1 \cos(T) + c_2 \sin(T), \quad (33)$$

โดยที่ c_1 และ c_2 คือค่าคงที่ เมื่อประยุกต์ใช้การแปลงเชิงเส้นทั่วไป (31) กับสมการ (33) จะได้ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (29) คือ

$$-t = c_1 \cos(\phi(t)) + c_2 \sin(\phi(t)),$$

โดยที่ฟังก์ชัน $T = \phi(t)$ เป็นผลเฉลยของสมการ

$$\frac{dT}{dt} = x'.$$

ตัวอย่างที่ 2 พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสองที่ไม่เป็นเชิงเส้น

$$x'' + \frac{2}{x} x'^2 = 0. \quad (34)$$

สมการ (34) เป็นสมการในรูปแบบที่ (4) ตามที่ได้ระบุไว้ในทฤษฎีบทที่ 1 โดยมีสัมประสิทธิ์ต่าง ๆ ดังต่อไปนี้

$$A_3 = 0, A_2 = \frac{2}{x}, A_1 = 0, A_0 = 0, \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0.$$

สามารถตรวจสอบได้ว่าสัมประสิทธิ์เหล่านี้เป็นไปตามเงื่อนไขในทฤษฎีบทที่ 2 กรณี (ข) ดังนั้นสมการ (34) สามารถทำให้เป็นสมการเชิงเส้นได้โดยการแปลงเชิงเส้นทั่วไป สำหรับการหาฟังก์ชัน F, G_1 และ G_2 จำเป็นต้องทำการแก้สมการในบทแทรกที่ 3 กรณี (ข) ซึ่งจะได้ผลลัพธ์เป็น

$$F_t = \frac{-K}{G_1}, K_x = \frac{2K}{x}, K_t = \frac{K(2G_{1t} + G_{2x})}{G_1}, G_{2t} = \frac{G_2(G_{1t} + G_{2x})}{G_1}, G_{2xx} = \frac{2G_{2x}}{x}, G_{1x} = \frac{2G_1}{x}. \quad (35)$$

เราสามารถหาคำตอบเฉพาะของสมการใน (35) ได้ดังนี้

$$G_1 = x^2, K = x^2, F = -t, G_2 = 0.$$

ดังนั้นจึงได้การแปลงเชิงเส้นในรูปแบบ

$$X = -t, dT = x^2 x' dt. \quad (36)$$

และจากบทแทรกที่ 3 ค่าสัมประสิทธิ์ α ของสมการเชิงเส้น (2) คือ

$$\alpha = 0.$$

ดังนั้น สมการ (34) จะถูกแปลงโดยการแปลงเชิงเส้น (36) ให้กลายเป็นสมการเชิงเส้น

$$X'' = 0. \quad (37)$$

ซึ่งผลเฉลยทั่วไปของสมการ (37) คือ

$$X = c_1 T + c_2, \quad (38)$$

โดยที่ c_1 และ c_2 คือค่าคงที่ เมื่อประยุกต์ใช้การแปลงเชิงเส้นทั่วไป (36) กับสมการ (38) จะได้ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (34) คือ

$$-t = c_1 \phi(t) + c_2,$$

โดยที่ฟังก์ชัน $T = \phi(t)$ เป็นผลเฉลยของสมการ

$$\frac{dT}{dt} = x^2 x'.$$

ตัวอย่างที่ 3 พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสองที่ไม่เป็นเชิงเส้น

$$x'' + 2xx' = 0. \quad (39)$$

สมการ (39) เป็นสมการในรูปแบบที่ (4) ตามที่ได้ระบุไว้ในทฤษฎีบทที่ 1 โดยมีสัมประสิทธิ์ต่าง ๆ ดังต่อไปนี้

$$A_3 = 0, A_2 = 0, A_1 = 2x, A_0 = 0, \lambda_1 = -2, \lambda_2 = 4x.$$

สามารถตรวจสอบได้ว่าสัมประสิทธิ์เหล่านี้เป็นไปตามเงื่อนไขในทฤษฎีบทที่ 2 กรณี (ค) ดังนั้นสมการ (39) สามารถทำให้เป็นสมการเชิงเส้นได้โดยการแปลงเชิงเส้นทั่วไป สำหรับการหาฟังก์ชัน F, G_1 และ G_2 จำเป็นต้องทำการแก้สมการในบทแทรกที่ 3 กรณี (ค) ซึ่งจะได้ผลลัพธ์เป็น

$$F_t = \frac{-K}{G_1}, K_x = 0, K_t = \frac{2G_1tK}{G_1}, G_{2t} = \frac{G_1tG_2}{G_1}, G_{1x} = 0, G_{2x} = 2G_1x. \quad (40)$$

เราสามารถหาคำตอบเฉพาะของสมการใน (40) ได้ดังนี้

$$G_1 = 1, G_2 = x^2, K = -1, F = t.$$

ดังนั้นจึงได้การแปลงเชิงเส้นในรูปแบบ

$$X = t, dT = (x' + x^2)dt. \quad (41)$$

และจากบทแทรกที่ 3 ค่าสัมประสิทธิ์ α ของสมการเชิงเส้น (2) คือ

$$\alpha = 0.$$

ดังนั้น สมการ (39) จะถูกแปลงโดยการแปลงเชิงเส้น (41) ให้กลายเป็นสมการเชิงเส้น

$$X'' = 0. \quad (42)$$

ซึ่งผลเฉลยทั่วไปของสมการ (42) คือ

$$X = c_1T + c_2, \quad (43)$$

โดยที่ c_1 และ c_2 คือค่าคงที่ เมื่อประยุกต์ใช้การแปลงเชิงเส้นทั่วไป (41) กับสมการ (43) จะได้ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (39) คือ

$$t = c_1\phi(t) + c_2,$$

โดยที่ฟังก์ชัน $T = \phi(t)$ เป็นผลเฉลยของสมการ

$$\frac{dT}{dt} = x' + x^2.$$

สรุปผลการวิจัย

งานวิจัยนี้ได้ศึกษาปัญหาการทำให้เป็นเชิงเส้นของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสองที่ไม่เป็นเชิงเส้น โดยใช้การแปลงเชิงเส้นทั่วไป เพื่อเปลี่ยนสมการให้อยู่ในรูป $X'' + \alpha X = 0$ พร้อมกำหนดเงื่อนไขที่จำเป็นตามทฤษฎีบทที่ 1 และวิเคราะห์เงื่อนไขที่เพียงพอตามทฤษฎีบทที่ 2 เพื่อให้มั่นใจว่าสมการสามารถแปลงได้จริง

นอกจากนี้ งานวิจัยยังนำเสนอวิธีการหาฟังก์ชันการแปลงเชิงเส้นและสัมประสิทธิ์ของสมการเชิงเส้น (α) โดยใช้การแก้ระบบสมการที่เข้ากันได้ตามบทแทรกที่ 3 พร้อมทั้งนำเสนอตัวอย่างเพื่อแสดงขั้นตอนการแปลงและการหาผลเฉลย

สุดท้ายนี้ แม้จะมุ่งเน้นการแปลงสมการให้อยู่ในรูป $X'' + \alpha X = 0$ แต่แนวทางและวิธีการที่นำเสนอยังสามารถประยุกต์ใช้กับการแปลงสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสองที่ไม่เชิงเส้นให้อยู่ในรูปแบบเชิงเส้นอื่น ๆ ได้อีกด้วย ซึ่งเปิดโอกาสให้มีการพัฒนาและศึกษาต่อยอดในอนาคตต่อไป

เอกสารอ้างอิง

- Lie, S. (1883). Klassifikation und integration von gewöhnlichen differentialgleichungen zwischen x, y, die eine gruppe von transformationen gestatten. III. *Archiv for Matematik og Naturvidenskab*, 8(4), 371-427.
- Liouville, R. (1889). Sur les Invariantes de Certaines Equations. *J. de l'École Poly technique*, 59, 7-88.
- Tresse, A. M. (1896). Détermination des Invariants Ponctuels de l'Équation Différentielle Ordinaire du Second Order $y'' = f(x, y, y')$. *Preisschriften der fürstlichen Jablonowski schen Gesellschaft XXXII*. Leipzig: S.Herzel.
- Cartan, E. (1924). Sur les variétés à connexion projective. *Bull. Soc. Math. France*, 52, 205-241.
- Durate, L. G. S., Moreira, I. C., & Santos, F. C. (1994). Linearisation under nonpoint transformations. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 27(19), L739-L743.
- Nakpim, W., & Meleshko, S. V. (2010). Linearization of second-order ordinary differential equations by generalized Sundman transformations. *SIGMA*, 6(51), 1-11.
- Chandrasekar, V. K., Senthilvelan, M., & Lakshmanan, M. (2006). A unification in the theory of linearization of second-order nonlinear ordinary differential equations. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 39(3), L69-L76.
- Voraka, P., Suksern, S., & Donjiwprai, N. (2020). Linearizability of Nonlinear Second-Order Ordinary Differential Equations by Using a Generalized Linearizing Transformation. *IAENG International Journal of Applied Mathematics*, 50(4), 845-852.