

Received: Aug 27, 2024

Revised: Dec 24, 2024

Accepted: Jul 25, 2024

วิยุตเชิงเส้นและสังวัตนาการเชิงการจัด

DISCRETE LINEAR AND COMBINATORIAL CONVOLUTIONS

กำจร มุณีแก้ว¹ ซิธิมาวอร์ บุญมา^{2*}

¹สาขาวิชาวัดผลการศึกษาและการสอนคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏบ้านสมเด็จเจ้าพระยา

²สำนักศึกษาทั่วไป มหาวิทยาลัยธนบุรี

Kumjorn Muneekaew¹ Zithimawor Bunma²

¹Program in Educational Measurement and Teaching Mathematics, Department of Education,
Bansomdejchaopraya Rajabhat University

²General Education Affair, Thonburi University

E-mail: ¹munee.j@hotmail.com, ²zithimawor@thonburi-u.ac.th

บทคัดย่อ

บทความนี้ได้นำเสนอวิยุตเชิงเส้นและสังวัตนาการเชิงการจัด โดยมีจุดประสงค์เพื่ออธิบายผลบวกของอนุกรมเลขคณิต-เรขาคณิตที่วางนัยทั่วไป ที่สอดคล้องตามความสัมพันธ์เวียนเกิดเชิงเส้นและสังวัตนาการเชิงการจัด สรุปได้ดังนี้
ผลบวกของอนุกรมเลขคณิต-เรขาคณิตที่วางนัยทั่วไป กำหนดโดยสูตร

$$S_n(z) = \sum_{j=1}^n j^n z^j, \quad z \in \mathbb{C}, \quad |z| < 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad \text{และ} \quad S_0(z) = \frac{z}{1-z}$$

ซึ่งสอดคล้องตามความสัมพันธ์เวียนเกิดและสังวัตนาการเชิงการจัด ดังนี้

$$S_{n+1}(z) = S_n(z) + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} S_k(z) S_{n-k}(z), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad \text{และ} \quad k = 0, 1, 2, \dots, n$$

และ

$$S_n(z) = \frac{z}{1-z} \left[1 + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} S_k(z) \right], \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad \text{และ} \quad k = 0, 1, 2, \dots, n$$

คำสำคัญ: วิยุตเชิงเส้น, สังวัตนาการเชิงการจัด, ความสัมพันธ์เวียนเกิดเชิงเส้น

Abstract

This article presents the discrete linear and combinatorial convolutions with the purpose of explaining the sum of generalized arithmetic-geometric series that corresponds to the linear recurrence relation and combinatorial convolutions can be summarized as follows

The sum of generalized arithmetic-geometric series is given by the formula:

$$S_n(z) = \sum_{j=1}^n j^n z^j, \quad z \in \mathbb{C}, \quad |z| < 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad \text{and} \quad S_0(z) = \frac{z}{1-z}$$

which corresponds to the recurrence relation and combinatorial convolutions as follows

$$S_{n+1}(z) = S_n(z) + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} S_k(z) S_{n-k}(z), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad \text{และ} \quad k = 0, 1, 2, \dots, n$$

and
$$S_n(z) = \frac{z}{1-z} \left[1 + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} S_k(z) \right], \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad \text{และ } k = 0, 1, 2, \dots, n$$

Keywords : Discrete linear, Combinatorial convolutions, Linear recurrence relation

บทนำ

ผลคูณโคชีเป็นหนึ่งในคณิตศาสตร์เชิงวิเคราะห์ที่มีความสำคัญกับเรื่อง อนุกรมอนันต์สองอนุกรม โดยตั้งชื่อตาม นักคณิตศาสตร์ชาวฝรั่งเศสชื่อ Augustin-Louis Cauchy ซึ่งได้ถูกนำไปใช้แพร่หลายในด้านแคลคูลัส และรวมทั้งในด้าน วิทยาศาสตร์ (ก่าจร มณีแก้ว, 2563) ฉะนั้นจึงควรต้องทำความรู้จักแนวคิดและทฤษฎีบท ให้เป็นที่เข้าใจกันเสียก่อนดังนี้

ผลคูณโคชี (Cauchy Products)

กำหนดให้ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ และ $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมอนันต์ แล้วผลคูณโคชี $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ ของอนุกรมอนันต์ทั้งสองนี้ ถูก

กำหนด

โดยสังวัตนาการวียด ดังนี้

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \otimes \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \quad \text{โดยที่ } c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \quad \text{สำหรับทุก } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

ทฤษฎีบทของเมอร์เทินส์ (Mertens' Theorem) (Wikipedia, 2024)

ให้ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ หรือ $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า โดยลู่เข้าสู่ A และ B ตามลำดับ

และ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ลู่เข้าสัมบูรณ์ แล้วผลคูณโคชี $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ ลู่เข้าสู่ AB

ผลบวกของอนุกรมเลขคณิต-เรขาคณิต

ผลบวกของอนุกรมเลขคณิต-เรขาคณิตที่วางนัยทั่วไป (Cirnu MI., 2011) ยังมีประเด็นที่ให้ศึกษาดังนี้

$$S_n(z) = \sum_{j=1}^n j^n z^j, \quad z \in C \quad \text{เมื่อ } C \text{ เป็นจำนวนเชิงซ้อน}, \quad |z| < 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad \text{และ } j = 1, 2, 3, \dots, n \quad \dots(1)$$

นอกจากนี้ยังเป็นฟังก์ชันก่อกำเนิดของลำดับเชิงตัวเลข $(j^n, j = 1, 2, 3, \dots)$ สำหรับ $n = 0$

จาก (1) จึงลดรูปไปสู่ผลบวกของการก้าวหน้าเรขาคณิต

$$S_0(z) = \sum_{j=1}^{\infty} z^j = \frac{z}{1-z} \quad \dots(2)$$

1. ความสัมพันธ์เวียนเกิดกับสังวัตนาการเชิงการจัด

ทฤษฎีบท 1 สำหรับ $z \in C$, $|z| < 1$ ผลบวก $S_n(z)$ ที่สอดคล้องตามความสัมพันธ์เวียนเกิดกับสังวัตนาการเชิงการจัด กำหนดโดย

$$S_{n+1}(z) = S_n(z) + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} S_k(z) S_{n-k}(z), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad \text{และ } k = 0, 1, 2, \dots, n \quad \dots(3)$$

พิสูจน์ ดำเนินการเปลี่ยนดัชนี $q = j - i$ และใช้ทฤษฎีบททวินามของนิวตัน (Whitman College, 2024)

$$\begin{aligned}
 S_{n+1}(z) &= \sum_{j=1}^{\infty} j^{n+1} z^j \\
 &= 1^n \cdot z^1 + 2 \cdot 2^n \cdot z^2 + 3 \cdot 3^n \cdot z^3 + 4 \cdot 4^n \cdot z^4 + \dots \\
 &= (1^n z^1 + 2^n z^2 + 3^n z^3 + 4^n z^4 + \dots) + (2^n z^2 + 3^n z^3 + 4^n z^4 + \dots) \\
 &\quad + (3^n z^3 + 4^n z^4 + 5^n z^5 + \dots) + (4^n z^4 + 5^n z^5 + 6^n z^6 + \dots) + \dots \\
 &= \sum_{j=1}^{\infty} j^n z^j + \sum_{i=1}^{\infty} (i+1)^n z^{i+1} + \sum_{i=1}^{\infty} (i+2)^n z^{i+2} + \sum_{i=1}^{\infty} (i+3)^n z^{i+3} + \dots \\
 &= \sum_{j=1}^{\infty} j^n z^j + \sum_{i=1}^{\infty} [(i+1)^n z^{i+1} + (i+2)^n z^{i+2} + (i+3)^n z^{i+3} + \dots] \\
 &= \sum_{j=1}^{\infty} j^n z^j + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=i+1}^{\infty} j^n z^j \\
 &= S_n(z) + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} (i+q)^n z^{i+q} ; q = j - i \\
 &= S_n(z) + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} i^k q^{n-k} z^i z^q \\
 &= S_n(z) + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sum_{i=1}^{\infty} i^k z^i \sum_{q=1}^{\infty} q^{n-k} z^q
 \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$S_{n+1}(z) = S_n(z) + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} S_k(z) S_{n-k}(z)$$

ตัวอย่าง โดยการใช้สูตร (2) และ (3) สำหรับ $z \in \mathbb{C}$ โดยที่ $|z| < 1$ ที่ได้มา

$$\begin{aligned}
 \text{เมื่อ } n=0; \quad S_1(z) &= S_0(z) + \sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} S_k(z) S_{0-k}(z) \\
 &= S_0(z) + \binom{0}{0} S_0(z) S_0(z) \\
 &= S_0(z) + S_0^2(z) \\
 &= \frac{z}{1-z} + \left(\frac{z}{1-z} \right)^2 \\
 &= \frac{z(1-z) + z^2}{(1-z)^2}
 \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$S_1(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$$

เมื่อ $n=1$; $S_2(z) = S_1(z) + \sum_{k=0}^1 \binom{1}{k} S_k(z) S_{1-k}(z)$

$$\begin{aligned}
 &= S_1(z) + \binom{1}{0} S_0(z) S_1(z) + \binom{1}{1} S_1(z) S_0(z) \\
 &= S_1(z) + S_0(z) S_1(z) + S_1(z) S_0(z) \\
 &= S_1(z) + 2S_0(z) S_1(z) \\
 &= \frac{z}{(1-z)^2} + 2 \left(\frac{z}{1-z} \right) \left[\frac{z}{(1-z)^2} \right] \\
 &= \frac{z(1-z) + 2z^2}{(1-z)^3}
 \end{aligned}$$

ดังนั้น $S_2(z) = \frac{z^2 + z}{(1-z)^3}$

เมื่อ $n=2$; $S_3(z) = S_2(z) + \sum_{k=0}^2 \binom{2}{k} S_k(z) S_{2-k}(z)$

$$\begin{aligned}
 &= S_2(z) + \binom{2}{0} S_0(z) S_2(z) + \binom{2}{1} S_1(z) S_1(z) + \binom{2}{2} S_2(z) S_0(z) \\
 &= S_2(z) + S_0(z) S_2(z) + 2S_1(z) S_1(z) + S_2(z) S_0(z) \\
 &= S_2(z) + 2S_0(z) S_2(z) + 2S_1^2(z) \\
 &= \frac{z^2 + z}{(1-z)^3} + 2 \left(\frac{z}{1-z} \right) \left[\frac{z^2 + z}{(1-z)^3} \right] + \frac{2z^2}{(1-z)^4} \\
 &= \frac{z(1-z^2) + 2z(z^2 + z) + 2z^2}{(1-z)^4}
 \end{aligned}$$

ดังนั้น $S_3(z) = \frac{z^3 + 4z^2 + z}{(1-z)^4}$

บทแทรก สำหรับ $z \in C, |z| < 1$

จำนวน $x_n(z) = \frac{1}{n!} S_n(z), n=1, 2, 3, \dots$... (4)

ซึ่งสอดคล้องตามความสัมพันธ์เวียนเกิดด้วยสังวัตนาการเชิงการจัด ดังนี้

$$(n+1)x_{n+1}(z) = x_n(z) + \sum_{k=0}^n x_k(z)x_{n-k}(z), n=0, 1, 2, \dots$$
 ... (5)

และมีเงื่อนไขเริ่มต้นคือ $x_0(z) = \frac{z}{1-z}$... (6)

พิสูจน์ โดยกำหนด (4) แทนที่ใน (3)

$$\begin{aligned} \text{จาก } S_{n+1}(z) &= S_n(z) + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} S_k(z) S_{n-k}(z) \\ &= S_n(z) + n! \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} S_k(z) \cdot \frac{1}{(n-k)!} S_{n-k}(z) \end{aligned}$$

$$S_{n+1}(z) = S_n(z) + n! \sum_{k=0}^n x_k(z) x_{n-k}(z)$$

$$\frac{1}{n!} S_{n+1}(z) = \frac{1}{n!} S_n(z) + \sum_{k=0}^n x_k(z) x_{n-k}(z)$$

$$\text{นั่นคือ } (n+1)x_{n+1}(z) = x_n(z) + \sum_{k=0}^n x_k(z) x_{n-k}(z)$$

$$\text{จาก (1) และ (4) จึงได้ว่า } n!x_n(z) = S_n(z) = \sum_{j=1}^n j^n z^j$$

สำหรับ $n=0$ อนุกรมดังกล่าวจะลดรูปไปสู่ผลบวกของความก้าวหน้าเรขาคณิต

$$x_0(z) = S_0(z) = \frac{z}{1-z}$$

$$\text{ดังนั้น จำนวน } x_n(z) = \frac{1}{n!} S_n(z), \quad n=1, 2, 3, \dots$$

จึงมีความสัมพันธ์เวียนเกิดด้วยสังวัตนาการเชิงการจัด ดังนี้

$$(n+1)x_{n+1}(z) = x_n(z) + \sum_{k=0}^n x_k(z) x_{n-k}(z), \quad n=0, 1, 2, \dots$$

$$\text{และมีเงื่อนไขเริ่มต้นคือ } x_0(z) = \frac{z}{1-z}$$

2. ความสัมพันธ์เวียนเกิดเชิงเส้น

สำหรับ $z \in C, |z| < 1$ เราแสดงให้เห็นว่า

$$G(z, p) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n(z) p^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} S_n(z) p^n, \quad \forall p \in C, |p| < 1 \quad \dots(7)$$

ฟังก์ชันก่อกำเนิดของ $x_n(z)$ เหมือนกันกับฟังก์ชันก่อกำเนิดเลขชี้กำลังของลำดับ $S_n(z)$

ทฤษฎีบท 2 ฟังก์ชันก่อกำเนิดเลขชี้กำลัง $G(z, p)$ ของลำดับ $S_n(z), n=0, 1, 2, \dots$

$$\text{ถูกกำหนดโดยสูตร } G(z, p) = \frac{ze^p}{1-ze^p}, \quad \forall z, p \in C, |z| < 1, |p| < 1 \quad \dots(8)$$

พิสูจน์ จาก (5); $(n+1)x_{n+1}(z) = x_n(z) + \sum_{k=0}^n x_k(z)x_{n-k}(z)$

โดยการคูณความสัมพันธ์ (5) ด้วย p^n และผลรวมสำหรับ $n = 0, 1, 2, \dots$

จึงได้
$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x_{n+1}(z)p^n = \sum_{n=0}^{\infty} x_n(z)p^n + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n x_k(z)x_{n-k}(z)p^n \quad \dots(9)$$

พิจารณา
$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x_{n+1}(z)p^n = x_1(z) + 2x_2(z)p + 3x_3(z)p^2 + \dots$$

$$= \frac{d}{dp} (x_0(z) + x_1(z)p + x_2(z)p^2 + x_3(z)p^3 + \dots) = \frac{d}{dp} \sum_{n=0}^{\infty} x_n(z)p^n$$

ดังนั้น
$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x_{n+1}(z)p^n = \frac{d}{dp} G(z, p) \quad \dots(9.1)$$

และพิจารณา
$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n x_k(z)x_{n-k}(z)p^n = \sum_{k=0}^0 x_k(z)x_{0-k}(z)p^0 + \sum_{k=0}^1 x_k(z)x_{1-k}(z)p^1$$

$$+ \sum_{k=0}^2 x_k(z)x_{2-k}(z)p^2 + \sum_{k=0}^3 x_k(z)x_{3-k}(z)p^3 + \sum_{k=0}^4 x_k(z)x_{4-k}(z)p^4 + \dots$$

$$= x_0(z)x_0(z) + (x_0(z)x_1(z) + x_1(z)x_0(z))p$$

$$+ (x_0(z)x_2(z) + x_1(z)x_1(z) + x_2(z)x_0(z))p^2$$

$$+ (x_0(z)x_3(z) + x_1(z)x_2(z) + x_2(z)x_1(z) + x_3(z)x_0(z))p^3$$

$$+ (x_0(z)x_4(z) + x_1(z)x_3(z) + x_2(z)x_2(z) + x_3(z)x_1(z) + x_4(z)x_0(z))p^4 + \dots$$

$$= (x_0(z) + x_1(z)p + x_2(z)p^2 + x_3(z)p^3 + \dots)^2 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x_n(z)p^n \right)^2$$

ดังนั้น
$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n x_k(z)x_{n-k}(z)p^n = G^2(z, p) \quad \dots(9.2)$$

จาก (9), (9.1) และ (9.2) ซึ่งสอดคล้องกับทฤษฎีบทโคชี-เมอร์เทินส์ (Cauchy-Mertens) (Kumaresan S., 2020) ที่เกี่ยวข้องกับการคูณของอนุกรมกำลังในความสัมพันธ์ (9) จึงลดรูปไปสู่สมการเชิงอนุพันธ์ (10)

$$\frac{d}{dp} G(z, p) = G(z, p) + G^2(z, p) \quad \dots(10)$$

$$\frac{d}{dp} G(z, p) - G(z, p) = G^2(z, p)$$

$$G^{-2}(z, p) \frac{d}{dp} G(z, p) - G^{-1}(z, p) = 1 \quad \dots(10.1)$$

ให้
$$v(z, p) = G^{-1}(z, p) \quad \dots(10.2)$$

จะได้

$$\frac{d}{dp}v(z, p) = -G^{-2}(z, p)\frac{d}{dp}G(z, p) \quad \dots(10.3)$$

จาก (10.1) , (10.2) และ (10.3) จึงได้ว่า

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dp}v(z, p) - v(z, p) &= 1 \\ \frac{d}{dp}v(z, p) + v(z, p) &= -1 \\ e^p \frac{d}{dp}v(z, p) + e^p v(z, p) &= -e^p \\ \frac{d}{dp}(e^p v(z, p)) &= -e^p \\ e^p v(z, p) &= -e^p + c_1 \\ v(z, p) &= -1 + c_1 e^{-p} \\ \frac{1}{G(z, p)} + 1 &= c_1 e^{-p} \\ \frac{1+G(z, p)}{G(z, p)} &= e^{-p-c} ; \quad c_1 = e^{-c} \\ \frac{G(z, p)}{G(z, p)+1} &= e^{p+c} \\ G(z, p) &= e^{p+c}G(z, p) + e^{p+c} \\ (1-e^{p+c})G(z, p) &= e^{p+c} \\ G(z, p) &= \frac{e^{p+c}}{1-e^{p+c}} \quad \dots(11) \\ G(z, 0) &= \frac{e^c}{1-e^c} ; \quad p = 0 \end{aligned}$$

ซึ่งได้เกิดเป็นตัวคงค่า $z \in \mathbb{C}$ จาก (6) , (7) และ (11) ในความสัมพันธ์สุดท้าย

สำหรับ $p = 0$ จึงได้ผลเป็น

$$G(z, 0) = x_0(z) = \frac{z}{1-z} = \frac{e^c}{1-e^c}$$

นั่นคือ

$$e^c = z \quad \dots(12)$$

จาก (11) และ (12) จะได้

$$G(z, p) = \frac{ze^p}{1-ze^p}$$

ต่อไปเราจะนำฟังก์ชันก่อกำเนิดเลขชี้กำลัง ไปหาความสัมพันธ์เวียนเกิดเชิงเส้น ดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3 สำหรับ $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$ ลำดับ $S_n(z)$ สอดคล้องกับความสัมพันธ์เวียนเกิดเชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปร

$$S_n(z) = \frac{z}{1-z} \left[1 + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} S_k(z) \right], \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad \dots(13)$$

พิสูจน์ จาก (8) ; $G(z, p) = \frac{ze^p}{1-ze^p}$

จะได้ $G(z, p) \left(\frac{1}{z} - e^p \right) = e^p$

$$\frac{1}{z} G(z, p) - G(z, p) e^p = e^p$$

และตามด้วยความสัมพันธ์ (7) จึงกลายเป็น

$$\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} S_n(z) p^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} S_n(z) p^n \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} p^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} p^n, \quad \forall p \in \mathbb{C}, |p| < 1 \quad \dots(14)$$

พิจารณา $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} S_n(z) p^n \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} p^n$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{1}{0!} S_0(z) p^0 + \frac{1}{1!} S_1(z) p^1 + \frac{1}{2!} S_2(z) p^2 + \dots \right) \left(\frac{1}{0!} p^0 + \frac{1}{1!} p^1 + \frac{1}{2!} p^2 + \dots \right) \\ &= \frac{1}{0!0!} S_0(z) p^0 + \frac{1}{0!1!} S_0(z) p^1 + \frac{1}{0!2!} S_0(z) p^2 + \frac{1}{0!3!} S_0(z) p^3 + \frac{1}{0!4!} S_0(z) p^4 + \dots \\ &\quad + \frac{1}{1!0!} S_1(z) p^1 + \frac{1}{1!1!} S_1(z) p^2 + \frac{1}{1!2!} S_1(z) p^3 + \frac{1}{1!3!} S_1(z) p^4 + \frac{1}{1!4!} S_1(z) p^5 + \dots \\ &\quad + \frac{1}{2!0!} S_2(z) p^2 + \frac{1}{2!1!} S_2(z) p^3 + \frac{1}{2!2!} S_2(z) p^4 + \frac{1}{2!3!} S_2(z) p^5 + \frac{1}{2!4!} S_2(z) p^6 + \dots \\ &\quad + \frac{1}{3!0!} S_3(z) p^3 + \frac{1}{3!1!} S_3(z) p^4 + \frac{1}{3!2!} S_3(z) p^5 + \frac{1}{3!3!} S_3(z) p^6 + \frac{1}{3!4!} S_3(z) p^7 + \dots \\ &\quad + \frac{1}{4!0!} S_4(z) p^4 + \frac{1}{4!1!} S_4(z) p^5 + \frac{1}{4!2!} S_4(z) p^6 + \frac{1}{4!3!} S_4(z) p^7 + \frac{1}{4!4!} S_4(z) p^8 + \dots \\ &\quad + \dots + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{k!m!} S_k(z) p^{k+m} + \dots \\ &= \frac{1}{0!0!} S_0(z) p^0 + \left(\frac{1}{0!1!} S_0(z) p^1 + \frac{1}{1!0!} S_1(z) p^1 \right) + \left(\frac{1}{0!2!} S_0(z) p^2 + \frac{1}{1!1!} S_1(z) p^2 + \frac{1}{2!0!} S_2(z) p^2 \right) \\ &\quad + \left(\frac{1}{0!3!} S_0(z) p^3 + \frac{1}{1!2!} S_1(z) p^3 + \frac{1}{2!1!} S_2(z) p^3 + \frac{1}{3!0!} S_3(z) p^3 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{1}{0!4!} S_0(z) p^4 + \frac{1}{1!3!} S_1(z) p^4 + \frac{1}{2!2!} S_2(z) p^4 + \frac{1}{3!1!} S_3(z) p^4 + \frac{1}{4!0!} S_4(z) p^4 \right) + \dots \\
& = \sum_{k=0}^0 \frac{1}{k!(0-k)!} S_k(z) p^0 + \sum_{k=0}^1 \frac{1}{k!(1-k)!} S_k(z) p^1 + \sum_{k=0}^2 \frac{1}{k!(2-k)!} S_k(z) p^2 \\
& + \sum_{k=0}^3 \frac{1}{k!(3-k)!} S_k(z) p^3 + \sum_{k=0}^4 \frac{1}{k!(4-k)!} S_k(z) p^4 + \dots
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} S_n(z) p^n \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} p^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!(n-k)!} S_k(z) p^n$$

โดยใช้ทฤษฎีบทของ Cauchy-Mertens อีกครั้งเกี่ยวกับการคูณของอนุกรมกำลัง
แล้วจึงเปลี่ยนรูปความสัมพันธ์ (14) ได้เป็น

$$\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} S_n(z) p^n - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!(n-k)!} S_k(z) p^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} p^n, \forall p \in \mathbb{C}, |p| < 1 \quad \dots(15)$$

จาก (15) ค่าสัมประสิทธิ์ของ p^n จึงได้ผลเป็นดังนี้

$$\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{n!} S_n(z) - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!(n-k)!} S_k(z) = \frac{1}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad \dots(16)$$

โดยการคูณ (16) ด้วย $n!$ เราจะได้ความสัมพันธ์เป็น

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{z} S_n(z) - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} S_k(z) = 1 \\
& \frac{1}{z} S_n(z) - \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} S_k(z) - \binom{n}{n} S_n(z) = 1 \\
& \frac{1-z}{z} S_n(z) - \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} S_k(z) = 1
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$S_n(z) = \frac{z}{1-z} \left[1 + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} S_k(z) \right], \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

ตัวอย่าง โดยใช้สูตร (2) และ (13) สำหรับ $z \in C, |z| < 1$ เราจะได้

$$\begin{aligned} n=1; \quad S_1(z) &= \frac{z}{1-z} \left[1 + \sum_{k=0}^0 \binom{1}{k} S_k(z) \right] \\ &= \frac{z}{1-z} \left[1 + \binom{1}{0} S_0(z) \right] = \frac{z}{1-z} \left(1 + \frac{z}{1-z} \right) \end{aligned}$$

ดังนั้น $S_1(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$

$$\begin{aligned} n=2; \quad S_2(z) &= \frac{z}{1-z} \left[1 + \sum_{k=0}^1 \binom{2}{k} S_k(z) \right] \\ &= \frac{z}{1-z} \left[1 + \binom{2}{0} S_0(z) + \binom{2}{1} S_1(z) \right] = \frac{z}{1-z} (1 + S_0(z) + 2S_1(z)) \\ &= \frac{z}{1-z} \left[1 + \frac{z}{1-z} + \frac{2z}{(1-z)^2} \right] = \frac{z}{1-z} \left[\frac{(1-z)^2 + z(1-z) + 2z}{(1-z)^2} \right] \end{aligned}$$

ดังนั้น $S_2(z) = \frac{z^2 + z}{(1-z)^3}$

$$\begin{aligned} n=3; \quad S_3(z) &= \frac{z}{1-z} \left[1 + \sum_{k=0}^2 \binom{3}{k} S_k(z) \right] \\ &= \frac{z}{1-z} \left[1 + \binom{3}{0} S_0(z) + \binom{3}{1} S_1(z) + \binom{3}{2} S_2(z) \right] \\ &= \frac{z}{1-z} (1 + S_0(z) + 3S_1(z) + 3S_2(z)) \\ &= \frac{z}{1-z} \left[1 + \frac{z}{1-z} + \frac{3z}{(1-z)^2} + \frac{3z(z+1)}{(1-z)^3} \right] \\ &= \frac{z(z^2 + 4z + 1)}{(1-z)^4} \end{aligned}$$

ดังนั้น $S_3(z) = \frac{z^3 + 4z^2 + z}{(1-z)^4}$

สรุป

การนำเสนอขั้นตอนการเชิงการจัด มาใช้ในการหาผลบวกของอนุกรมเลขคณิต-เรขาคณิตที่วางนัยทั่วไป ในรูปความสัมพันธ์เวียนเกิดเชิงเส้น จึงช่วยลดขั้นตอนในการหาผลลัพธ์ได้สะดวกขึ้นและมีความถูกต้องแม่นยำ อันจะนำไปประยุกต์ใช้กับสูตรตัวกำหนดในแบบต่างๆ สำหรับผลบวกของอนุกรมเลขคณิต-เรขาคณิตที่วางนัยทั่วไปที่ซับซ้อนขึ้นไป

เอกสารอ้างอิง

- กำจร มุณีแก้ว. (2563). ผลบวกของอนุกรมเลขคณิต-เรขาคณิตที่วางนัยทั่วไป. *วารสารก้าวหน้าทันโลกวิทยาศาสตร์: คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี*, 19(2), 1-11.
- Cîrnu Ml. (2011). Determinantal formulas for sum of generalized arithmetic-geometric series. *De La Asociacion Matematica Venezolana*, 18(1), 25-38.
- Kumaresan, S. (2020). *Cauchy-Mertens*. Retrieved from <https://www.youtube.com/Cauchy-Mertens/>.
- Whitman College. (2024). *Newton's Binomial Theorem*. Retrieved from <https://www.whitman.edu/Newton's Binomial Theorem/>.
- Wikipedia. (2024). *Mertens' Theorem*. Retrieved from <https://en.wikipedia.org/Mertens' Theorem/>.

Translated Thai References

- Muneekaew, K. (2020). Eulerian Numbers and Generalized Arithmetic – Geometric Series. *Advance Science Journal, Science and Technology*, 19(2), 1-11.