

สมการไดโอแฟนไทน์ $21^x + 4^y = z^2$

On the Diophantine equations $21^x + 4^y = z^2$

ธัญวรัชญ์ บุตรสาร^{1,*}, นิติมา พรหมมารัตน์² และ ณัฐมน กันไชย¹

¹โปรแกรมวิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคำนวณ

คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเชียงราย เชียงราย ประเทศไทย

²โปรแกรมวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏเชียงราย เชียงราย ประเทศไทย

Thanwarat Butsan^{1,*}, Nitima Phrommarat² and Natthamon kanchai¹

¹Department of Mathematics and Computing Science,

Faculty of Science and Technology, Chiang Rai Rajabhat University Chiang Rai Thailand

²Department of Mathematics,

Faculty of Education, Chiang Rai Rajabhat University, Chiang Rai, Thailand

บทคัดย่อ

ในงานวิจัยนี้จะศึกษาการมีผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ในรูปแบบ $21^x + 4^y = z^2$ โดยพิจารณาการมีผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ดังกล่าว เมื่อ x, y และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

คำสำคัญ : สมการไดโอแฟนไทน์, จำนวนเฉพาะ, ผลเฉลยเดียว

Abstract

The objective of this work is to study the existence of non-negative integer solutions of the Diophantine equation $21^x + 4^y = z^2$.

Keywords : Diophantine equation, Prime numbers, Unique solution

* Corresponding author : thanwarat.but@crpu.ac.th

Received : 29/06/2023

Revised : 25/12/2023

Accepted : 09/01/2024

ที่มาและความสำคัญ

สมการไดโอแฟนไทน์ (Diophantine equations) คือ สมการที่สนใจคำตอบที่เป็นจำนวนเต็ม ซึ่งอาจเป็นดีกรีหนึ่งหรือมากกว่านั้น อาจมีตัวแปรเดียวหรือหลายตัวแปร สมการไดโอแฟนไทน์เป็นสมการที่ศึกษากันอย่างมากมายในหลายรูปแบบ รูปแบบหนึ่งที่ได้ศึกษาอย่างกว้างขวาง คือ สมการที่อยู่ในรูป $a^x + p^y = z^2$ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ในปี ค.ศ. 2011 [1] Suvarnamani ได้ศึกษาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $2^x + p^y = z^2$ เมื่อ x, y และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ และ p เป็นจำนวนเฉพาะ

ในปี ค.ศ. 2012 Sroysang [2] ได้ พิสูจน์ว่า $(x, y, z) = (1, 0, 3)$ เป็นผลเฉลยเดียวที่ x, y และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ของสมการไดโอแฟนไทน์ $18^x + 19^y = z^2$

ในปี ค.ศ. 2013 Sroysang [3] ได้แสดงว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $2^x + 3^y = z^2$ มีเพียงสามผลเฉลยคือ $(0, 1, 2), (3, 0, 3)$ และ $(4, 2, 5)$ และในปีเดียวกัน Sroysang [4] ได้ศึกษาสมการไดโอแฟนไทน์ $7^x + 8^y = z^2$ โดยที่ x, y และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ และพบว่าสมการดังกล่าวมีผลเฉลยเพียงผลเฉลยเดียว นั่นคือ $(x, y, z) = (1, 0, 3)$

ในปี ค.ศ. 2014 Sroysang [5, 6] ได้แสดงให้เห็นว่า $(1, 0, 3)$ เป็นผลเฉลยเดียวของสมการไดโอแฟนไทน์ $8^x + 13^y = z^2$ และ $8^x + 59^y = z^2$ เมื่อ x, y และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

ในงานวิจัยนี้ได้ศึกษาสมการไดโอแฟนไทน์ที่อยู่ในรูป $21^x + 4^y = z^2$ โดยการนำเสนอการพิสูจน์ผลเฉลยของสมการนี้ เป็นแนวคิดหนึ่งที่เป็นประโยชน์สำหรับผู้สนใจศึกษาการหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ โดยอาศัยทฤษฎีบทที่มักใช้ในการพิสูจน์การมีผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์คือ

ทฤษฎีบท 1 [7] (Catalan's conjecture) $(a, b, x, y) = (3, 2, 2, 3)$ เป็นผลเฉลยเดียวของสมการไดโอแฟนไทน์ $a^x - b^y = 1$ เมื่อ a, b, x และ y เป็นจำนวนเต็มที่ $\min \{a, b, x, y\} > 1$

ผลการวิจัยและอภิปรายผลการวิจัย

ในบทความนี้จะศึกษา สมการไดโอแฟนไทน์ $21^x + 4^y = z^2$ โดยการพิสูจน์ว่ามีผลเฉลยเพียงผลเฉลยเดียวหรือไม่ ซึ่งจะเริ่มต้นด้วยการพิสูจน์บทตั้ง ทำการพิสูจน์การมีผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $1 + 4^y = z^2$ โดยที่ y, z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ดังต่อไปนี้

บทตั้ง 2 สมการ $1 + 4^y = z^2$ ไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

พิสูจน์ กำหนดให้ $1 + 4^y = z^2$

กรณีที่ 1 ถ้า $y = 0$

จะได้ว่า $1 + 4^0 = z^2$

นั่นคือ $z^2 = 2$

ดังนั้น $z = \sqrt{2}$ ซึ่งไม่เป็นจำนวนเต็ม

กรณีที่ 2 ถ้า $y = 1$

จะได้ว่า $1 + 4^1 = z^2$

นั่นคือ $z^2 = 5$

ดังนั้น $z = \sqrt{5}$ ซึ่งไม่เป็นจำนวนเต็ม

กรณีที่ 3 ถ้า $y > 1$ จะได้ $2y > 1$

3.1 ถ้า $z = 0$ จะได้ $1 + 4^y = 0$

นั่นคือ $4^y = -1$ เป็นไปไม่ได้

3.2 ถ้า $z = 1$ จะได้ $1 + 4^y = 1$

นั่นคือ $4^y = 0$ เป็นไปไม่ได้

3.3 ถ้า $z > 1$ จัดรูปสมการจะได้ $1 = z^2 - 2^2y$

โดยทฤษฎีบท 1 จะได้ว่า $z = 3$ และ $2y = 3$

ทำให้ได้ว่า $y = 3/2$ ซึ่งไม่เป็นจำนวนเต็ม

จากทั้ง 3 กรณีสรุปได้ว่า สมการไดโอแฟนไทน์ $1 + 4^y = z^2$ ไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

□

ทฤษฎีบท 3 สมการ $21^x + 1 = z^2$ โดยที่ $x, z \geq 0$ ไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

พิสูจน์ ให้ $21^x + 1 = z^2$ แบ่งการพิจารณาเป็น 3 กรณี ดังนี้

กรณีที่ 1 ถ้า $x = 0$

จะได้ $21^0 + 1 = z^2$

นั่นคือ $1 + 1 = z^2$

ดังนั้น $z = \sqrt{2}$ ซึ่งไม่เป็นจำนวนเต็ม

กรณีที่ 2 ถ้า $x = 1$

จะได้ $21^1 + 1 = z^2$

นั่นคือ $z^2 = 22$

ดังนั้น $z = \sqrt{22}$ ซึ่งไม่เป็นจำนวนเต็ม

กรณีที่ 3 ถ้า $x > 1$ จัดสมการให้อยู่ในรูป $z^2 - 21^x = 1$

3.1 ถ้า $z = 0$ จะได้ว่า $-21^x = 1$ จะได้ว่า $x = 1$ เกิดข้อขัดแย้ง

3.2 ถ้า $z = 1$ จะได้ว่า $-21^x = 0$ เป็นไปไม่ได้

3.3 ถ้า $z > 1$ จากทฤษฎีบท 1 ซึ่งกล่าวว่าสมการ $a^x - b^y = 1$ มีผลเฉลยที่เป็นจำนวน

เต็มที่ไม่เป็นลบเพียงผลเฉลยเดียว คือ $(a, b, x, y) = (3, 2, 2, 3)$ เกิดข้อขัดแย้ง

จากทั้ง 3 กรณีย่อจะได้ว่า ถ้า $x > 1$ จะไม่สามารถหาผลเฉลยได้

จากทั้ง 3 กรณีจึงสรุปได้ว่า สมการไดโอแฟนไทน์ $21^x + 1 = z^2$ ไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

□

ทฤษฎีบท 4 สมการไดโอแฟนไทน์ $21^x + 4^y = z^2$ มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียงชุดเดียวคือ $(x, y, z) = (1, 1, 5)$

พิสูจน์ ให้ $21^x + 4^y = z^2$ โดยที่ x, y และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ แบ่งการพิจารณาเป็น 3 กรณี ดังนี้

กรณีที่ 1 $x = 0$

$$\text{จะได้ } 1 + 4^y = z^2$$

โดยบทตั้ง 2 จะได้ว่าไม่มีผลเฉลย

กรณีที่ 2 $x = 1$

$$\text{จะได้ } 21 + 4^y = z^2 \text{ นั่นคือ } 21 = z^2 - 4^y = (z - 2^y)(z + 2^y)$$

เนื่องจาก 21 สามารถเขียนอยู่ในรูปผลคูณของจำนวนเต็มบวกได้สองแบบคือ $3 \cdot 7$

และ $21 \cdot 1$ นอกจากนี้ $z + 2^y > z - 2^y$ จึงสามารถแบ่งพิจารณาเป็นสองกรณีย่อยดังนี้

กรณี 2.1

$$z + 2^y = 7 \tag{1}$$

และ

$$z - 2^y = 3 \tag{2}$$

จาก สมการ (1) และสมการ (2) จะได้ว่า $2^{y+1} = 4$

นั่นคือ $y + 1 = 2$

ดังนั้น $y = 1$

และจะได้ $z = 5$

นั่นคือ $(1, 1, 5)$ เป็นผลเฉลยหนึ่งของสมการ

กรณี 2.2

$$z + 2^y = 21 \quad (3)$$

และ

$$z - 2^y = 1 \quad (4)$$

จาก สมการ (3) และสมการ (4) จะได้ว่า $2^{y+1} = 20$ และจะได้ $2^{y-1} = 5$

กรณีนี้จึงเป็นไปได้

กรณีที่ 3 $x > 1$

เมื่อพิจารณา $21^x = z^2 - 2^2y = (z - 2^y)(z + 2^y)$

และกำหนดให้ u เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ และ $u < x$ โดยที่

$$21^u = z - 2^y$$

$$21^{x-u} = z + 2^y$$

$$\text{จะได้ว่า } 21^u(21^{x-2u} - 1) = 21^{x-u} - 21^u = 2 \cdot 2^y = 2^{y+1}$$

เนื่องจาก 21^u ไม่สามารถจัดอยู่ในรูป 2^n ทุก n ที่เป็นจำนวนนับ

$$\text{จะได้ว่า } 21^u = 121^x - 1 = 2^{y+1}$$

$$\text{นั่นคือ } 21^x - 2^{y+1} = 1$$

โดยทฤษฎีบท 1 จะได้ว่า สมการดังกล่าวไม่มีผลเฉลย

จากทั้ง 3 กรณี จึงสรุปได้ว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $21^x + 4^y = z^2$ มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ เพียงผลเฉลยเดียวคือ $(x, y, z) = (1, 1, 5)$ □

สรุปผลการวิจัย

สำหรับในงานวิจัยนี้ได้ศึกษาผลเฉลย (x, y, z) เมื่อ x, y และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ของสมการไดโอแฟนไทน์ $21^x + 4^y = z^2$ พบว่า $(x, y, z) = (1, 1, 5)$ เป็นผลเฉลยเพียงผลเฉลยเดียวของสมการดังกล่าว

กิตติกรรมประกาศ

บทความวิจัยฉบับนี้ถูกล่วงไปด้วยดีด้วยการสนับสนุนจาก คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเชียงราย

เอกสารอ้างอิง

- [1] Suvarnamani, A. (2011). Solutions of the Diophantine equation $2^x + p^y = z^2$. International Journal of Mathematical Sciences and Applications, 1(13), p. 1415-1419.
- [2] Sroysang, B. (2012). More on the Diophantine Equation $8^x + 19^y = z^2$. International Journal of Pure and Applied Mathematics, 81(4), p. 601-604.
- [3] Sroysang, B. (2013). More on the Diophantine Equation $2^x + 3^y = z^2$. International Journal of Pure and Applied Mathematics, 84(2), p. 133-137.
- [4] Sroysang, B. (2013). More on the Diophantine Equation $7^x + 8 = z^2$. International Journal of Pure and Applied Mathematics, 84(1), p. 111-114.
- [5] Sroysang, B. (2014). More on the Diophantine Equation $8^x + 13^y = z^2$. International Journal of Pure and Applied Mathematics, 90(1), p. 69-72.
- [6] Sroysang, B. (2014). More on the Diophantine Equation $8^x + 59^y = z^2$. International Journal of Pure and Applied Mathematics, 91(1), p. 139-142.
- [7] Mihilescu, P. (2004). Primary cyclotomic units and a proof of Catalan's conjecture. Journal für die reine und angewandte Mathematik, 27(2004), p. 167 - 195.