

สมบัติผลรวมและเอกลักษณ์คาสสินีสำหรับจำนวน k - ลูคัสเชิงทั่วไป

On Summation Properties and Cassini-like Identity for Generalized k - Lucas Numbers

จุฑามาส สุขแยง^{1,*}

¹ภาควิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเชียงใหม่ 50300 ไทย

Jutamas Sookyang^{1,*}

¹Department of Mathematics and Statistics Faculty of Science and Technology Chiangmai Rajabhat University 50300 Thailand

บทคัดย่อ

จำนวน k - ลูคัสเชิงทั่วไป เป็นส่วนขยายที่สำคัญของจำนวนลูคัสและความสัมพันธ์ทางโครงสร้างอย่างมากกับจำนวน k - ฟิโบนอกชี งานวิจัยนี้ นำเสนอการศึกษาเชิงวิเคราะห์เกี่ยวกับสมบัติทางพีชคณิตที่สำคัญของจำนวน k - ลูคัสเชิงทั่วไป ซึ่งมีลักษณะเด่น คือ โครงสร้างที่แบ่งเป็นบล็อกอย่างชัดเจน วัตถุประสงค์ของงานวิจัยนี้ คือ การนำเสนอทฤษฎีบทเอกลักษณ์คาสสินีของจำนวน k - ลูคัสเชิงทั่วไป ซึ่งเป็นความสัมพันธ์ระหว่างพจน์ต่าง ๆ นอกจากนี้ งานวิจัยยังได้พิสูจน์สูตรผลรวมแบบแบ่งบล็อกและแบบสะสม ซึ่งแสดงให้เห็นว่าการหาผลรวมทีละ k พจน์ที่เรียงติดกันภายในบล็อกที่ m ใด ๆ ได้นำไปสู่การขยายผลลัพธ์ดังกล่าวเป็น สูตรผลรวมสะสมตั้งแต่พจน์แรกจนถึงพจน์ที่ N ใด ๆ ผลลัพธ์ที่ได้สามารถจัดให้อยู่ในรูปแบบปิดที่อาศัยเพียงค่าของจำนวนลูคัสดัชนี $m-1$, m และ $m+1$ เท่านั้น

คำสำคัญ : จำนวน k - ลูคัสเชิงทั่วไป, จำนวนลูคัส, เอกลักษณ์คาสสินี, สูตรผลรวม

*Corresponding author : jutamas@g.cmru.ac.th

Received : 02/04/2026 Revised : 18/05/2026 Accepted : 20/06/2026

Abstract

The generalized k - Lucas numbers represent a significant extension of the Lucas numbers and exhibit a strong structural relationship with the k - Fibonacci sequence. This research presents an analytical study of the fundamental algebraic properties of the generalized k - Lucas numbers, which characterized by a distinctive block-partitioned structure. The primary objective of this study is to introduce the theorem of Cassini's identity for the generalized k - Lucas numbers, illustrating the underlying relationships between various terms. Furthermore, this paper has also proven the block and cumulative summation formulas. By establishing the sum of k consecutive terms within any arbitrary block m leads to the extension of these results into a cumulative summation formula from the initial term up to any N^{th} term. The obtained results can be expressed in a closed form strictly in terms of the values of the Lucas numbers at indices $m-1$, m and $m+1$.

Keywords : Generalized k - Lucas numbers, Lucas numbers, Cassini's Identity, Summation formula

ที่มาและความสำคัญ

ลำดับฟีโบนัชชี และลำดับลูคัส ได้รับความสนใจอย่างกว้างขวางในแวดวงคณิตศาสตร์ เนื่องจากมีสมบัติที่น่าสนใจและสามารถนำไปประยุกต์ในหลากหลายสาขาวิชา เช่น ทฤษฎีกลุ่ม พีชคณิตเชิงเส้น วิทยาการคอมพิวเตอร์ และฟิสิกส์ ตลอดระยะเวลาที่ผ่านมา มีนักคณิตศาสตร์จำนวนมากพยายามขยายแนวคิดของลำดับเหล่านี้ให้อยู่ในรูปแบบทั่วไปเพื่อค้นหาความสัมพันธ์ใหม่ ๆ ในปี 2010 Mikkawy และ Sogabe [1] ได้นำเสนอตระกูลใหม่ของจำนวน k - ฟีโบนัชชีเชิงทั่วไป ต่อมาในปี 2017 Özkan และคณะ [2] ได้ต่อยอดแนวคิดดังกล่าว โดยนิยามตระกูลใหม่ของจำนวน k - ลูคัสเชิงทั่วไป และได้พิสูจน์ความสัมพันธ์ระหว่างตระกูลของจำนวน k - ฟีโบนัชชี จำนวน k - ลูคัส จำนวนฟีโบนัชชีและจำนวนลูคัส ต่อมานักคณิตศาสตร์หลายท่านได้นำโครงสร้างทางพีชคณิตดังกล่าวไปประยุกต์และต่อยอดอย่างต่อเนื่อง ยกตัวอย่างเช่น ในปี 2018 Özkan และคณะ [3] ได้ขยายขอบเขตของจำนวนในตระกูลนี้ให้อยู่ในรูปแบบของพหุนาม โดยการนิยามพหุนาม 2 - ฟีโบนัชชี ซึ่งนำไปสู่การค้นพบความสัมพันธ์อันน่าสนใจที่เชื่อมโยงกับสมบัติทวินามในสามเหลี่ยมปาสคาล ในปี 2021 Taştan และคณะ [4] ได้ยกระดับการศึกษาตระกูลจำนวนเหล่านี้ไปสู่รูปแบบของพหุนามของ k - ฟีโบนัชชีทั่วไปและจำนวน k - ลูคัสเชิงทั่วไป และได้นำเสนอเอกลักษณ์คาสสินีสำหรับพหุนามดังกล่าว ในปี 2024 Singavananda และคณะ [5] ได้ทำการศึกษาแบบเจาะลึกถึงสมบัติของจำนวน k - ฟีโบนัชชีเชิงทั่วไป โดยมุ่งเน้นไปที่การหาความสัมพันธ์ระหว่างพจน์ต่าง ๆ ของ จำนวน k - ฟีโบนัชชี และตรวจสอบผลบวกและผลต่างของจำนวนเหล่านั้น ในกรณีดัชนี $kn+r$ เมื่อ $r \in \{0, 1, 2, 3\}$

แม้ว่าสมบัติเชิงพีชคณิตพื้นฐานและเอกลักษณ์คาสสินีของพหุนามของจำนวน k - ลูคัสเชิงทั่วไป จะได้รับการศึกษาไปแล้ว แต่การศึกษาเกี่ยวกับเอกลักษณ์คาสสินีของจำนวน k - ลูคัสเชิงทั่วไป และสูตรผลรวมของจำนวน k - ลูคัสเชิงทั่วไป โดยเฉพาะการหาผลรวมในรูปแบบปิดของจำนวนนี้ยังคงมีจำกัด วัตถุประสงค์ของงานวิจัยนี้

คือ การนำเสนอทฤษฎีบทเอกลักษณ์คาสินีของจำนวน k - ลูคัสเชิงทั่วไป ซึ่งเป็นความสัมพันธ์ระหว่างพจน์ต่าง ๆ และพิสูจน์สูตรผลรวมของจำนวน k - ลูคัสเชิงทั่วไป แบบแบ่งบล็อก ซึ่งจะแสดงให้เห็นว่า การหาผลรวมของ k พจน์ใด ๆ ที่ติดกันในบล็อกเดียวกัน สามารถจัดให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันเลขยกกำลังของจำนวนลูคัสปกติเพียงสามพจน์ได้อย่างสมบูรณ์ อีกทั้งยังนำไปสู่การขยายผลเป็นสูตรรูปแบบปิดของผลรวมสะสมตั้งแต่พจน์แรกจนถึงพจน์ที่ N ใด ๆ

ความรู้พื้นฐาน

ทบทวนนิยามและสมบัติพื้นฐานของจำนวนลูคัส ตลอดจนนิยามของจำนวน k - ลูคัสเชิงทั่วไปที่จะถูกนำมาใช้ในการพิสูจน์ทฤษฎีบทหลักต่อไป

บทนิยาม 2.1 [6] ให้ $n \in \mathbb{N}_0$ จำนวนลูคัส (L_n) กำหนดโดยความสัมพันธ์เวียนเกิด $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ สำหรับ $n \geq 2$ มีค่าเริ่มต้น $L_0 = 2$ และ $L_1 = 1$

ตารางที่ 1 แสดงจำนวนลูคัส 10 พจน์แรก

พจน์ที่ n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
L_n	2	1	3	4	7	11	18	29	47	76

สูตรไบเนตสำหรับจำนวนลูคัส คือ $L_n = \alpha^n + \beta^n$ เมื่อ $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ และ $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

ทฤษฎีบท 2.2 [6] เอกลักษณ์คาสินีของจำนวนลูคัส $(L_n)^2 - L_{n-1}L_{n+1} = 5(-1)^n$

บทนิยาม 2.3 [7] ให้ L_n เป็นจำนวนลูคัส จำนวนลูคัสดัชนีลบ กำหนดโดย $L_{-n} = (-1)^n L_n$ ทำให้ได้พจน์ดัชนีลบ 10 พจน์แรก

ตารางที่ 2 แสดงจำนวนลูคัสดัชนีเป็นลบ 10 พจน์แรก

พจน์ที่ n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
L_{-n}	2	-1	3	-4	7	-11	18	-29	47	-76

สำหรับตระกูลของจำนวน k - ลูคัสเชิงทั่วไป Özkan และคณะ [2] ได้ให้นิยามไว้ ดังนี้

บทนิยาม 2.4 ให้ n และ k เป็นจำนวนธรรมชาติ โดยที่ $k \neq 0$ จะมี $m, r \in \mathbb{N}$ เพียงคู่เดียวที่ $n = mk + r$, $0 \leq r < k$ จำนวน k - ลูคัสเชิงทั่วไป $(L_n^{(k)})$ นิยามโดย

$$L_n^{(k)} = (L_{m+1})^r (L_m)^{k-r}$$

จำนวน k - ลูคัสเชิงทั่วไป 10 พจน์แรก สำหรับ $k = 1, 2, 3$

ตารางที่ 3 แสดง จำนวน k – ลูคัสเชิงทั่วไป 10 พจน์แรก สำหรับ $k = 1, 2, 3$

พจน์ที่ n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$L_n^{(1)}$	2	1	3	4	7	11	18	29	47	76
$L_n^{(2)}$	4	2	1	3	9	12	16	28	49	77
$L_n^{(3)}$	8	4	2	1	3	9	27	36	48	64

จากตารางที่ 3 จะพบว่า จำนวน 1 – ลูคัสเชิงทั่วไป ($L_n^{(1)}$) คือ ลำดับลูคัส นั่นเอง

จากการวิเคราะห์บทนิยามและตารางค่าของจำนวน k – ลูคัสเชิงทั่วไป พบว่า โครงสร้างของแต่ละพจน์ถูกประกอบขึ้นจากผลคูณของจำนวนลูคัส (กรณี $k = 1$) ดังนั้น แนวคิดหลักในการดำเนินการวิจัยเพื่อศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างพจน์และสร้างสูตรเอกลักษณ์สำหรับจำนวน k – ลูคัสเชิงทั่วไปกรณี $k \geq 2$ จึงอาศัยการจัดรูปทางพีชคณิตเพื่อลดทอนความซับซ้อนให้อยู่ในรูปของจำนวนลูคัส แล้วสามารถเชื่อมโยงกับสมบัติของจำนวนลูคัสที่เคยได้มีการศึกษากันอย่างแพร่หลาย และเมื่อนำมาหลักการดังกล่าวมาประยุกต์ใช้กับการหาผลบวกของลำดับ หรือที่เรียกว่าอนุกรมจำกัด โดยเริ่มจากแบ่งช่วงหาผลรวมพจน์ที่ละ k พจน์ จนนำไปสู่การค้นพบรูปแบบปิดที่ช่วยให้การคำนวณอนุกรมมีความกระชับและง่ายขึ้น แนวคิดนี้จึงถูกนำมาใช้เป็นเครื่องมือในการพิสูจน์ทฤษฎีบทในงานวิจัยนี้

ผลการวิจัยและอภิปรายผลการวิจัย

การนำเสนอผลการวิจัยและทฤษฎีบทใหม่ที่ค้นพบในงานวิจัยนี้มุ่งเน้นไปที่ การศึกษาคุณสมบัติทางพีชคณิตและเอกลักษณ์ของจำนวน k – ลูคัสเชิงทั่วไป ที่ได้รับการพิสูจน์และขยายผลมาจากจำนวนลูคัส ผลลัพธ์หลักที่จะกล่าวถึงต่อไปนี้ครอบคลุมตั้งแต่การสร้างเอกลักษณ์คาสสินีรูปแบบใหม่ ไปจนถึงการนำเสนอสูตรผลรวมแบบแบ่งบล็อกและสูตรผลรวมสะสมในรูปแบบปิดของจำนวน k – ลูคัสเชิงทั่วไป ซึ่งช่วยให้การคำนวณผลรวมของลำดับที่มีความซับซ้อนสามารถหาค่าได้โดยอาศัยเพียงจำนวนลูคัสปกติเพียงไม่กี่พจน์เท่านั้น

เอกลักษณ์หนึ่งที่มีชื่อเสียงในการศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างพจน์ของลำดับต่าง ๆ ไม่ว่าจะเป็นลำดับฟีโบนัชชี ลำดับลูคัส ลำดับจาโคปสทอล ฯลฯ มักมีจุดเริ่มต้นในการพิสูจน์เอกลักษณ์คาสสินีของลำดับแต่ละชนิดอยู่เสมอ ทฤษฎีต่อไปนี้จะพิสูจน์เอกลักษณ์คาสสินีของจำนวน k – ลูคัสเชิงทั่วไป

ทฤษฎีบท 3.1 เอกลักษณ์คาสสินีของจำนวน k – ลูคัสเชิงทั่วไป

สำหรับจำนวนเต็ม $n \geq 1$ และ $k \geq 2$ จำนวน k – ลูคัสเชิงทั่วไป สอดคล้องกับความสัมพันธ์

$$(L_{kn}^{(k)})^2 - L_{kn-1}^{(k)} L_{kn+1}^{(k)} = 5(-1)^n (L_n^{(k)})^{2k-2}$$

พิสูจน์ จากนิยาม 2.4 สามารถจัดพจน์ของจำนวน k – ลูคัสให้อยู่ในรูปของจำนวนลูคัส ดังนี้

กรณีพจน์ $L_{kn}^{(k)}$ จะได้ $m = n$ และ $r = 0$

$$\text{ดังนั้น } L_{kn}^{(k)} = (L_n)^k$$

กรณีพจน์ $L_{kn-1}^{(k)}$ จะได้ $m = n-1$ และ $r = k-1$

$$\text{ดังนั้น } L_{kn-1}^{(k)} = L_{n-1}(L_n)^{k-1}$$

กรณีพจน์ $L_{kn+1}^{(k)}$ จะได้ $m = n$ และ $r = 1$

$$\text{ดังนั้น } L_{kn+1}^{(k)} = (L_n)^{k-1}L_{n+1}$$

$$\begin{aligned} \text{พิจารณา } (L_{kn}^{(k)})^2 - L_{kn-1}^{(k)}L_{kn+1}^{(k)} &= [(L_n)^k]^2 - [L_{n-1}(L_n)^{k-1}][(L_n)^{k-1}L_{n+1}] \\ &= (L_n)^{2k} - L_{n-1}L_{n+1}(L_n)^{2k-2} \\ &= (L_n)^{2k-2}[(L_n)^2 - L_{n-1}L_{n+1}] \\ &= 5(-1)^n(L_n)^{2k-2} \quad \text{จาก ทฤษฎีบท 2.2} \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } (L_{kn}^{(k)})^2 - L_{kn-1}^{(k)}L_{kn+1}^{(k)} = 5(-1)^n(L_n)^{2k-2}$$

แนวคิดของทฤษฎีบทถัดไปมาจากขั้นตอนวิธีการหารที่นิยามดัชนี $n = mk + r$ โดยให้ k คือ ขนาดของบล็อก (จำนวนพจน์ใน 1 บล็อก) m คือ หมายเลขบล็อก โดยเริ่มจากบล็อกที่ 0, 1, 2, ... และ r คือ ตำแหน่งของพจน์ภายในบล็อกนั้น ($0 \leq r \leq k-1$) ทฤษฎีบทต่อไปนี้จะแสดงให้เห็นว่า ผลรวมของจำนวน k - ลูคัสภายในบล็อกขนาด k พจน์ สามารถจัดให้อยู่ในรูปแบบปิดที่ขึ้นอยู่กับจำนวนลูคัสเพียง 3 พจน์เท่านั้น

ทฤษฎีบท 3.2 สูตรผลรวมแบบแบ่งบล็อกของลำดับ k - ลูคัสเชิงทั่วไป

ให้ $m \geq 1$ และ $k \geq 1$ เป็นจำนวนเต็ม ผลรวมของจำนวน k - ลูคัสเชิงทั่วไปในบล็อกที่ m (จำนวน k พจน์ติดกัน) สอดคล้องกับสมการ

$$\sum_{r=0}^{k-1} L_{mk+r}^{(k)} = \frac{L_m}{L_{m-1}}[(L_{m+1})^k - (L_m)^k]$$

พิสูจน์ ให้ $S_m^{(k)}$ แทนผลรวมของบล็อกที่ m จากบทนิยาม 2.1 จะได้

$$\begin{aligned} S_m^{(k)} &= \sum_{r=0}^{k-1} (L_m)^{k-r} (L_{m+1})^r \\ &= (L_m)^k + (L_m)^{k-1}(L_{m+1}) + (L_m)^{k-2}(L_{m+1})^2 + \dots + (L_m)(L_{m+1})^{k-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (L_m)[(L_m)^{k-1} + (L_m)^{k-2}(L_{m+1}) + (L_m)^{k-3}(L_{m+1})^2 + \dots + (L_{m+1})^{k-1}] \\
 &= (L_m) \left(\frac{(L_m)^k - (L_{m+1})^k}{L_m - L_{m+1}} \right) \\
 &= (L_m) \left(\frac{(L_m)^k - (L_{m+1})^k}{-L_{m-1}} \right) \quad \because L_{m+1} = L_m + L_{m-1} \\
 &= \left(\frac{L_m}{L_{m-1}} \right) ((L_{m+1})^k - (L_m)^k)
 \end{aligned}$$

ดังนั้น $\sum_{r=0}^{k-1} L_{mk+r}^{(k)} = \frac{L_m}{L_{m-1}} [(L_{m+1})^k - (L_m)^k]$

ตัวอย่าง กรณี $k=3$ และพิจารณาล็อกที่ $m=1$ นั่นคือ ดัชนี n ในบล็อกนี้เริ่มตั้งแต่ $n=1(3)+0$ ถึง $n=1(3)+2$ นั่นคือ พจน์ที่ $n=3, 4, 5$

เมื่อพิจารณาจำนวน 3 - ลูคัส ทีละพจน์ จะได้ $L_3^{(3)} = (L_1)^3 (L_2)^0 = 1^3 \cdot 1 = 1$

$$L_4^{(3)} = (L_1)^2 (L_2)^1 = 1^2 \cdot 3 = 3$$

$$L_5^{(3)} = (L_1)^1 (L_2)^2 = 1 \cdot 3^2 = 9$$

ผลรวมบล็อกนี้ คือ $1+3+9=13$

เมื่อใช้สูตรผลรวม จะได้ $\sum_{r=0}^2 L_{3+r}^{(3)} = \frac{L_1}{L_0} [(L_2)^3 - (L_1)^3] = \frac{1}{2} [3^3 - 1^3] = \frac{1}{2} [27 - 1] = 13$

ตัวอย่าง ถ้าต้องการหาผลรวมของบล็อกที่ 5 ของ 100 - ลูคัส ซึ่งมีจำนวนเรียงต่อกันถึง 100 พจน์ โดยต้องหาค่าแต่ละพจน์ แต่ถ้าใช้สูตรผลรวมแบบแบ่งบล็อกในการคำนวณ จะได้ $\sum_{r=0}^{99} L_{500+r}^{(100)} = \frac{L_5}{L_4} [(L_6)^{100} - (L_5)^{100}]$ ซึ่งใช้เพียงจำนวนลูคัสเพียง 3 จำนวน ได้แก่ L_4, L_5 และ L_6 ในการหาผลรวมเท่านั้น

จากทฤษฎีบท 3.2 เราสามารถขยายผลเพื่อหาสูตรผลรวมสะสมตั้งแต่พจน์แรก $n=0$ ถึง พจน์ที่ N ใด ๆ ได้ ตามขั้นตอนวิธีการหาร ดัชนีสุดท้ายเป็น $N = Mk + R$ โดยที่ $0 \leq R < k$ เมื่อ M คือ จำนวนบล็อกเต็ม และ R คือ ตำแหน่งเศษที่เหลือในบล็อกปัจจุบัน แนวคิดในการสร้างสูตรนี้คือ แบ่งความยาวของลำดับ N ออกเป็น 2 ส่วน ได้แก่

1. ส่วนที่เป็นบล็อกเต็ม ซึ่งมีตั้งแต่บล็อกที่ 0 ถึง $M-1$
2. ส่วนที่เป็นเศษของบล็อกสุดท้าย คือ บล็อกที่ M ที่มีสมาชิกเพียง $R+1$ ตัว

ทฤษฎีบท 3.3 สูตรผลรวมสะสมของลำดับ k - ลูคัสเชิงทั่วไป

สำหรับจำนวนเต็ม $N \geq 0$ และ $k \geq 1$ ให้ $N = Mk + R$ โดยที่ $0 \leq R < k$ ผลรวมของจำนวน k - ลูคัสเชิงทั่วไป ตั้งแต่พจน์ที่ 0 ถึง N สอดคล้องกับสมการต่อไปนี้

$$\sum_{n=0}^N L_n^{(k)} = \sum_{m=0}^{M-1} \left[\frac{L_m}{L_{m-1}} [(L_{m+1})^k - (L_m)^k] \right] + \frac{(L_M)^{k-R}}{L_{M-1}} [(L_{M+1})^{R+1} - (L_M)^{R+1}]$$

ข้อสังเกต 3.4 สูตรผลรวมในทฤษฎี 3.3 มีข้อสังเกต 2 ประการดังนี้

1. กรณีที่ $k = 1$ นั่นคือ 1 บล็อกจะมีสมาชิก 1 ตัว ซึ่งเมื่อแทนค่าในสูตรผลรวมจะได้

$$\frac{L_m}{L_{m-1}} [(L_{m+1})^1 - (L_m)^1] = \frac{L_m}{L_{m-1}} [(L_{m+1}) - (L_m)] = \frac{L_m}{L_{m-1}} (L_{m-1}) = L_m$$

2. กรณีดัชนีลบ หากขยายโดเมนของดัชนีลบ สูตรผลรวมยังคงเป็นจริง เนื่องจากลำดับลูคัสไม่มีพจน์ใดมีค่าเป็นศูนย์ ทำให้สูตรผลบวกซึ่งมี พจน์ L_{m-1} เป็นตัวส่วนจึงหาค่าได้เสมอ

สรุปผลการวิจัย

งานวิจัยนี้ศึกษาและค้นพบสมบัติใหม่ของตระกูลจำนวน k - ลูคัสเชิงทั่วไป คือ เอกลักษณ์คาสินีของจำนวน k - ลูคัสเชิงทั่วไป สูตรผลรวมแบบแบ่งบล็อกของจำนวน k - ลูคัสเชิงทั่วไป ซึ่งช่วยให้สามารถคำนวณผลรวมของจำนวน k - ลูคัส k พจน์ที่อยู่ในบล็อกเดียวกันได้อย่างรวดเร็ว โดยอาศัยเพียงค่าของจำนวนลูคัสปกติที่ดัชนี $m-1$, m และ $m+1$ เท่านั้น และขยายผลจนได้ สูตรผลรวมสะสมในรูปแบบปิดตลอดช่วงดัชนีใด ๆ ที่มีความกะทัดรัดและแสดงให้เห็นถึงโครงสร้างทางพีชคณิตที่สวยงามของจำนวน k - ลูคัส

กิตติกรรมประกาศ

ผู้วิจัยขอขอบพระคุณภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเชียงใหม่ ที่ให้การสนับสนุนสิ่งอำนวยความสะดวกและทรัพยากรสารสนเทศสำหรับการค้นคว้าวิจัยอย่างสม่ำเสมอ รวมทั้งขอขอบพระคุณคณาจารย์และเพื่อนร่วมงานทุกท่านที่ได้ร่วมมือปรายและแลกเปลี่ยนมุมมองทางคณิตศาสตร์อันเป็นประโยชน์ ท้ายที่สุดนี้ ขอขอบพระคุณผู้ทรงคุณวุฒิทุกท่านที่ได้สละเวลาในการประเมินและให้ข้อเสนอแนะอันมีค่า ซึ่งช่วยให้บทความวิจัยฉบับนี้มีความสมบูรณ์แบบและรัดกุมมากยิ่งขึ้น

เอกสารอ้างอิง

- [1] Mikkawy, M., & Sogabe, T. (2010). A new family of k -Fibonacci numbers. *Applied Mathematics and Computation*, 215(12), 4456–4461. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2009.12.069>
- [2] Özkan, E., Altun, İ., & Göçer, A. A. (2017). On relationship among a new family of k -Fibonacci, k -Lucas numbers, Fibonacci and Lucas number. *Chiang Mai Journal of Science*, 44(4), 1744–1750. <https://epg.science.cmu.ac.th/ejournal/journal-detail.php?id=8500>
- [3] Özkan, E., Taştan, M., & Aydoğdu, A. (2018). 2-Fibonacci polynomials in the family of Fibonacci numbers. *Notes on Number Theory and Discrete Mathematics*, 24(3), 47–55. <https://doi.org/10.7546/nntdm.2018.24.3.47-55>
- [4] Taştan, M., Özkan, E., & Shannon, A. G. (2021). The generalized k -Fibonacci polynomials and generalized k -Lucas polynomials. *Notes on Number Theory and Discrete Mathematics*, 27(2), 148–158. <https://doi.org/10.7546/nntdm.2021.27.2.148-158>
- [5] Singavananda, P., Kusa-A, H., Chakapi, S., & Denphetnong, A. (2024). On generalized Fibonacci and k -generalized Fibonacci numbers. *ICIC Express Letters*, 18(8), 801–809. <https://doi.org/10.24507/icicel.18.08.801>
- [6] Guürses, N., Şentürk, G.Y., & Yüce., S. (2022). A comprehensive survey of dual-generalized complex Fibonacci and Lucas numbers. *Sigma Journal of Engineering and Natural Sciences*, 40(1), 179–187. <https://doi.org/10.14744/sigma.2022.00014>
- [7] Keskin, R. (2014). Three identities concerning Fibonacci and Lucas numbers. *Notes on Number Theory and Discrete Mathematics*, 20(5), 44–48. <https://nntdm.net/papers/nntdm-20/NNTDM-20-5-44-48.pdf>