
วิเคราะห์การสั่นของอนุภาคมวล m แบบไม่เชิงเส้นภายใต้พลังงานศักย์ที่เป็นฟังก์ชันของตำแหน่ง
สมการกำลังสามตัวแปรเดียว

Analyzing the nonlinear vibration of particles of mass under potential energy as a
function of position cubic equation in one variable

อาทิตย์ หูเต็ม^{1*}, ศานิตย์ สุวรรณวงศ์²

¹ สาขาวิชาวิทยาศาสตร์ศึกษา คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเพชรบูรณ์

² สาขาวิชาฟิสิกส์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเพชรบูรณ์

Artit Hutem^{1*}, Sanit Suwanwong²

¹ Division of Science Education, Faculty of Science and Technology, Phetchabun
Rajabhat University

² Division of Physics, Faculty of Science and Technology, Phetchabun Rajabhat University

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์ เพื่อศึกษาการสั่นของอนุภาคมวล m ขึ้นอยู่กับพลังงานศักย์ที่เป็นฟังก์ชันของตำแหน่ง ซึ่งเริ่มจากการคำนวณหาการกระจัดของการสั่นของอนุภาคมวล m ที่เป็นฟังก์ชันของเวลาโดยในงานวิจัยนี้ใช้กฎการเคลื่อนที่ข้อที่ 2 ของนิวตันและใช้วิธีการแก้สมการเชิงอนุพันธ์เพื่อหาผลเฉลย ในงานวิจัยนี้ยังสามารถคำนวณหาความเร็วของการสั่นของอนุภาคมวล m ที่เป็นฟังก์ชันของเวลา และความเร่งของการสั่นของอนุภาคมวล m ที่เป็นฟังก์ชันของเวลา พลังงานจลน์ของการสั่นของอนุภาคมวล m ที่เป็นฟังก์ชันของเวลา พลังงานรวมของระบบของการสั่นของอนุภาคมวล m ที่เป็นฟังก์ชันของเวลา

คำสำคัญ : การกระจัด, ความเร็ว, ความเร่ง, พลังงานรวม

*Corresponding author : artithutem@pcru.ac.th

Received : 01/02/2026 Revised : 22/06/2026 Accepted : 23/06/2026

Abstract

The objective of this research is to study the vibration of a mass m particle depending on its potential energy as a function of position, starting with calculating the displacement of the mass particle's vibration as a function of time. This research uses Newton's second law of motion and differential equation solving methods to find solutions. This research can also calculate the velocity of the vibrational of a particle of mass as a function of time and the acceleration of the vibration of a particle of mass as a function of time; the kinetic energy of the vibration of a particle of mass as a function of time; and the total energy of the system of vibrations of particles of mass as a function of time.

Keywords : Displacement, Velocity, Acceleration, Total Energy

ที่มาและความสำคัญ

ในงานวิจัยนี้มีความคิดมาจากการสอนในรายวิชาการศาสตร์คลาสสิกในเรื่อง การสั่นของอนุภาคใน 1 มิติ โดยงานวิจัยนี้ได้มีการดัดแปลงเกี่ยวกับพลังงานศักย์ยืดหยุ่นในสปริงจาก $V(x) = (1/2)kx^2$ โดยให้มีการรบกวนระบบการสั่นแบบ Simple Harmonic Oscillator เป็น $V(x) = (1/2)kx^2 - (\lambda/\beta)mx - (\lambda/3)mx^3$ (สมการกำลังสามตัวแปรเดียว) ซึ่งในงานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์คือ เพื่อวิเคราะห์การสั่นของอนุภาคมวล m เมื่อถูกการรบกวนระบบโดยพลังงานศักย์ที่เป็นฟังก์ชันของตำแหน่ง วิเคราะห์การกระจัดของการสั่นของอนุภาคมวล m ที่เป็นฟังก์ชันของเวลา แอมพลิจูดจะมีลักษณะลดลง หรือเพิ่มขึ้น วิเคราะห์เกี่ยวกับคาบของการสั่น เป็นต้น คำนวณหาความเร็วของการสั่นของอนุภาคมวล m ที่เป็นฟังก์ชันของเวลา คำนวณหาความเร่งของการสั่นของอนุภาคมวล m ที่เป็นฟังก์ชันของเวลา คำนวณหาค่าพลังงานจลน์ของการสั่นของอนุภาคมวล m ที่เป็นฟังก์ชันของเวลา และคำนวณหาค่าพลังงานรวมของระบบของการสั่นของอนุภาคมวล m ที่เป็นฟังก์ชันของเวลา

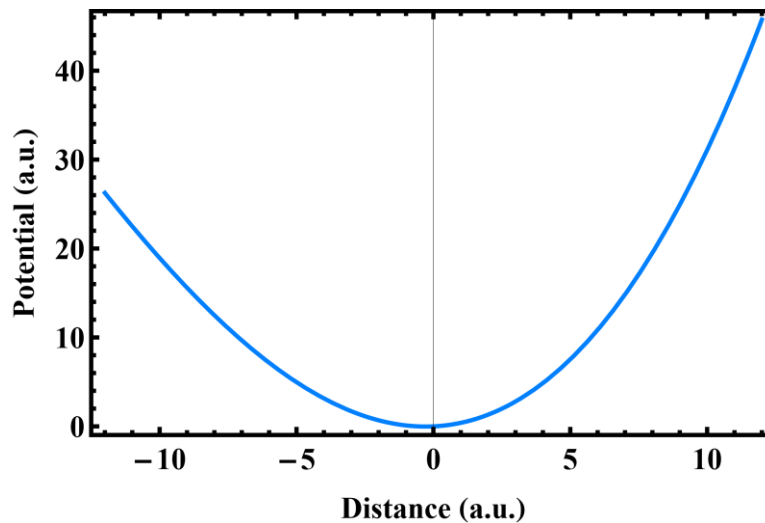
วิธีการดำเนินการวิจัย

ขั้นตอนดำเนินการวิจัย

1. การกำหนดพลังงานศักย์ที่เป็นฟังก์ชันของตำแหน่ง (สมการกำลังสามตัวแปรเดียว) ในระบบการสั่นแบบ Simple Harmonic Oscillator [4,5,6] ดังนี้

$$V_p(x) = \frac{kx^2}{2} - \frac{m\lambda x}{\beta} - \frac{m\lambda x^3}{3} \quad (1)$$

จากสมการที่ (1) สามารถแสดงความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่งระยะทางกับ พลังงานศักย์ในระบบการสั่นแบบ Simple Harmonic Oscillator แบบไม่สมมาตร ดังภาพที่ 1



ภาพที่ 1 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่งระยะทางกับ พลังงานศักย์ในระบบการสั่นแบบ Simple Harmonic Oscillator โดยที่ $k = 0.5$, $m = 0.07$, $\lambda = 0.1$, $\beta = 0.2$

2. การคำนวณหาการกระจัดของการสั่นของอนุภาคมวล m ที่เป็นฟังก์ชันของเวลาในระบบการสั่นแบบ Simple Harmonic Oscillator ภายใต้พลังงานศักย์ในระบบการสั่นแบบ Simple Harmonic Oscillator แบบไม่สมมาตร โดยใช้กฎการเคลื่อนที่ของนิวตันข้อที่ 2 $\sum F = ma$ [1,2,3]

$$\sum F = ma = m \frac{dv}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2} \quad (2)$$

จาก $F = -\nabla V$ ในระบบพิกัดฉาก แทนลงในสมการที่ (2) จะได้

$$-\nabla V_p(x) = m \frac{d^2x}{dt^2} \quad (3)$$

แทนสมการที่ (1) ลงในสมการที่ (3) จะได้

$$-\frac{d}{dx} \left(V_p(x) \right) = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$-\frac{d}{dx} \left(\frac{kx^2}{2} - \frac{m\lambda x}{\beta} - \frac{m\lambda x^3}{3} \right) = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$-kx + \frac{m\lambda}{\beta} + m\lambda x^2 = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = \frac{\lambda}{\beta} + \lambda x^2 \quad (4)$$

มีการละเลยเทอมที่ x^2 ในสมการที่ (4)

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = \frac{\lambda}{\beta} \quad (5)$$

สมการที่ (5) มีผลเฉลย คือ $x^{(0)} = x_h^{(0)}(t) + x_i^{(0)}(t)$ การหาผลเฉลยเอกพันธ์ $x_h^{(0)}(t)$ [7] ได้จากสมการที่ (5) ทางขวามือของสมการมีค่าเป็นศูนย์

$$\frac{d^2x_h^{(0)}}{dt^2} + \omega^2 x_h^{(0)} = 0 \quad (6)$$

โดยที่ $\omega = \sqrt{k/m}$ เรียกว่า ความถี่เชิงมุม มีค่าเท่ากับ $2\pi f$ [8,9,10,11]

$$x_h^{(0)}(t) = A_m \sin(\omega t + \phi) \quad (7)$$

$$\frac{d^2x_i^{(0)}}{dt^2} + \omega^2 x_i^{(0)} = \frac{\lambda}{\beta} \quad (8)$$

ต่อไปหาผลเฉลยเฉพาะ $x_i^{(0)}(t)$ โดยการกำหนดสมมติผลเฉลย $x_i^{(0)} = B$, $\dot{x}_i^{(0)} = 0$, $\ddot{x}_i^{(0)} = 0$ แทนลงในสมการที่ (8) จะได้

$$0 + \omega^2 B = \frac{\lambda}{\beta} \quad (9)$$

$$B = \frac{\lambda}{\beta \omega^2} \quad (10)$$

$$\text{ผลเฉลยเฉพาะ } x_i^{(0)}(t) = \frac{\lambda}{\beta \omega^2} \quad (11)$$

ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์แบบไม่เอกพันธ์ ของสมการที่ (5) คือ

$$x^{(0)} = A_m \sin(\omega t + \phi) + \frac{\lambda}{\beta \omega^2} \quad (12)$$

ต่อไปเรากำหนด ผลเฉลยสมการที่ (4) เป็น $x^{(1)}(t) = x^{(0)}(t) + \lambda x_1(t)$ แทนกลับลงในสมการที่ (4) จะได้

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x^{(1)}(t)}{dt^2} + \omega^2 x^{(1)}(t) &= \frac{\lambda}{\beta} + \lambda \left(x^{(1)}(t) \right)^2 \\ \frac{d^2 x^{(0)}(t)}{dt^2} + \lambda \frac{d^2 x_1(t)}{dt^2} + \omega^2 x^{(0)}(t) + \omega^2 \lambda x_1(t) &= \frac{\lambda}{\beta} + \lambda \left(x^{(0)}(t) + \lambda x_1(t) \right)^2 \\ \frac{d^2 x^{(0)}(t)}{dt^2} + \lambda \frac{d^2 x_1(t)}{dt^2} + \omega^2 x^{(0)}(t) + \omega^2 \lambda x_1(t) \\ &= \frac{\lambda}{\beta} + \lambda \left(x^{(0)}(t) \right)^2 + 2x^{(0)}(t) \lambda^2 x_1(t) + \lambda^3 \left(x_1(t) \right)^2 \end{aligned} \quad (13)$$

พิจารณา λ

$$\frac{d^2 x_1(t)}{dt^2} + \omega^2 x_1(t) = \frac{1}{\beta} + \left(x^{(0)}(t) \right)^2 \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_1(t)}{dt^2} + \omega^2 x_1(t) &= \frac{1}{\beta} + \left(A_m \sin(\omega t + \phi) + \frac{\lambda}{\beta \omega^2} \right)^2 \\ \frac{d^2 x_1(t)}{dt^2} + \omega^2 x_1(t) &= \frac{1}{\beta} + (A_m)^2 \sin^2(\omega t + \phi) + \frac{2\lambda A_m}{\beta \omega^2} \sin(\omega t + \phi) + \frac{\lambda^2}{\beta^2 \omega^4} \end{aligned} \quad (15)$$

$$\frac{d^2 x_1(t)}{dt^2} + \omega^2 x_1(t) = \frac{1}{\beta} + \frac{\lambda^2}{\beta^2 \omega^4} + \frac{(A_m)^2}{2} (1 - \cos(2\omega t + \phi)) + \frac{2\lambda A_m}{\beta \omega^2} \sin(\omega t + \phi) \quad (16)$$

สมมุติ ผลเฉลยเฉพาะ

$$x_1(t) = D + C_1 \cos(\omega t + \phi) + C_2 \sin(\omega t + \phi) + G_1 \cos(2\omega t + \phi) + G_2 \sin(2\omega t + \phi) \quad (17)$$

$$\dot{x}_1(t) = -\omega C_1 \sin(\omega t + \phi) + \omega C_2 \cos(\omega t + \phi) - 2\omega G_1 \sin(2\omega t + \phi) + 2\omega G_2 \cos(2\omega t + \phi)$$

$$\ddot{x}_1(t) = -\omega^2 C_1 \cos(\omega t + \phi) - \omega^2 C_2 \sin(\omega t + \phi) - 4\omega^2 G_1 \cos(2\omega t + \phi) - 4\omega^2 G_2 \sin(2\omega t + \phi) \quad (18)$$

$$\begin{aligned}
 & -\omega^2 C_1 \cos(\omega t + \phi) - \omega^2 C_2 \sin(\omega t + \phi) - 4\omega^2 G_1 \cos(2\omega t + \phi) - 4\omega^2 G_2 \sin(2\omega t + \phi) \\
 & + \omega^2 D + \omega^2 C_1 \cos(\omega t + \phi) + \omega^2 C_2 \sin(\omega t + \phi) + \omega^2 G_1 \cos(2\omega t + \phi) + \omega^2 G_2 \sin(2\omega t + \phi) \\
 & = \frac{1}{\beta} + \frac{\lambda^2}{\beta^2 \omega^4} + \frac{(A_m)^2}{2} (1 - \cos(2\omega t + \phi)) + \frac{2\lambda A_m}{\beta \omega^2} \sin(\omega t + \phi)
 \end{aligned} \tag{19}$$

เทียบสัมประสิทธิ์ จะได้

$$D = \frac{1}{\beta \omega^2} + \frac{\lambda^2}{\beta^2 \omega^6} + \frac{A_m^2}{2\omega^2} \tag{20}$$

เทียบสัมประสิทธิ์ $\cos(2\omega t + \phi)$ จะได้

$$\begin{aligned}
 -3\omega^2 G_1 &= -\frac{A_m^2}{2} \\
 G_1 &= \frac{A_m^2}{6\omega^2}
 \end{aligned} \tag{21}$$

$$x_1(t) = \frac{1}{\beta \omega^2} + \frac{\lambda^2}{\beta^2 \omega^6} + \frac{A_m^2}{2\omega^2} + \frac{A_m^2}{6\omega^2} \cos(2\omega t + \phi) \tag{22}$$

$$\frac{d^2 x_1(t)}{dt^2} + \omega^2 x_1(t) = 0 \tag{23}$$

$$\text{สมมุติผลเฉลยคือ } x_1(t) = E_1 \sin(\omega t) + E_2 \cos(\omega t) \tag{24}$$

$$\begin{aligned}
 x^{(1)}(t) &= A_m \sin(\omega t + \phi) + \frac{\lambda}{\beta \omega^2} + \lambda \left(\frac{1}{\beta \omega^2} + \frac{\lambda^2}{\beta^2 \omega^6} + \frac{A_m^2}{2\omega^2} + \frac{A_m^2}{6\omega^2} \cos(2\omega t + \phi) \right. \\
 &\quad \left. + E_1 \sin(\omega t) + E_2 \cos(\omega t) \right)
 \end{aligned} \tag{25}$$

$$x^{(1)} = 0, t = 0, \phi = 0$$

$$E_2 = -\frac{2}{\beta \omega^2} - \frac{\lambda^2}{\beta^2 \omega^6} - \frac{4A_m^2}{6\omega^2}$$

$$x^{(1)}(t) = A_m \sin(\omega t + \phi) + \frac{\lambda}{\beta \omega^2} + \lambda \left(\frac{1}{\beta \omega^2} + \frac{\lambda^2}{\beta^2 \omega^6} + \frac{A_m^2}{2\omega^2} + \frac{A_m^2}{6\omega^2} \cos(2\omega t + \phi) \right) - \left(\frac{2}{\beta \omega^2} + \frac{\lambda^2}{\beta^2 \omega^6} + \frac{4A_m^2}{6\omega^2} \right) \cos(\omega t) \quad (26)$$

จากสมการที่ (26) สามารถทำการแสดงข้อมูลของการกระจัดของการสั่นของอนุภาคมวล m ที่เป็นฟังก์ชันของเวลา [7] ในหัวข้อผลการวิจัยดังภาพที่ (1) ซึ่งอนุภาคมวล m เกิดการสั่นเพราะในสมการที่ (26) เทอมของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ทำให้อนุภาคมวล m เกิดการสั่นที่ขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ λ, β, k, m

3. การคำนวณหาความเร็วของอนุภาคมวล m ที่เคลื่อนที่ภายใต้พลังงานศักย์ในระบบการสั่นแบบ Simple Harmonic Oscillator แบบไม่สมมาตร [7]

จากสมการที่ (26) สามารถหาอนุพันธ์ของการกระจัดเทียบกับเวลา จะได้ ความเร็วของอนุภาคมวล m ที่เกิดขึ้น

$$v^{(1)}(t) = \omega A_m \cos(\omega t + \phi) - \frac{\lambda A_m^2}{3\omega} \sin(2\omega t + \phi) + \left(\frac{2}{\beta \omega} + \frac{\lambda^2}{\beta^2 \omega^5} + \frac{4A_m^2}{6\omega} \right) \sin(\omega t) \quad (27)$$

จากสมการที่ (27) คือ ความเร็วของอนุภาคมวล m ที่เป็นฟังก์ชันของเวลาที่เกิดการสั่นภายใต้พลังงานศักย์ที่มีค่าพารามิเตอร์ λ, β, k, m ในงานวิจัยนี้สามารถทำการพล็อตกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วของอนุภาคมวล m กับเวลาที่มีค่าเพิ่มขึ้น ดังภาพที่ (2) ต่อมาในงานวิจัยนี้สามารถนำความเร็วของอนุภาคมวล m ในสมการที่ (27) มาหาอนุพันธ์เทียบกับเวลา จะได้ ความเร่งของอนุภาคมวล m ที่เป็นฟังก์ชันของเวลา

$$a^{(1)}(t) = -\omega^2 A_m \sin(\omega t + \phi) - \frac{2\lambda A_m^2}{3} \cos(2\omega t + \phi) - \left(\frac{2}{\beta} + \frac{\lambda^2}{\beta^2 \omega^4} + \frac{4A_m^2}{6} \right) \cos(\omega t) \quad (28)$$

ในงานวิจัยนี้สามารถทำการพล็อตกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเร่งของอนุภาคมวล m กับเวลาที่มีค่าเพิ่มขึ้น ดังภาพที่ (3) ต่อไปนำความเร็วของอนุภาคมวล m ในสมการที่ (27) มาคำนวณหาค่าพลังงานจลน์ที่เป็นฟังก์ชันของเวลาในระบบการสั่นอนุภาคมวล m ดังนี้

$$T^{(1)}(t) = \frac{m}{2} (v^{(1)}(t))^2$$

$$T^{(1)}(t) = \frac{m}{2} \left(\omega A_m \cos(\omega t + \phi) - \frac{\lambda A_m^2}{3\omega} \sin(2\omega t + \phi) + \left(\frac{2}{\beta \omega} + \frac{\lambda^2}{\beta^2 \omega^5} + \frac{4A_m^2}{6\omega} \right) \sin(\omega t) \right)^2 \quad (29)$$

พลังงานจลน์ในสมการที่ (29) จะขึ้นอยู่กับค่าพารามิเตอร์ λ, β, k, m ต่อมาในงานวิจัยนี้สามารถคำนวณเกี่ยวกับ

พลังงานรวมของระบบการสั่นที่เป็นฟังก์ชันของเวลา ดังนี้

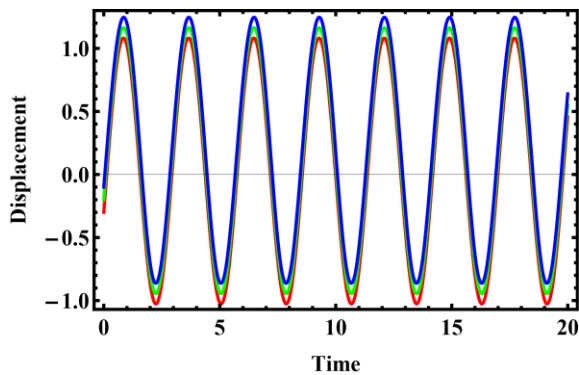
$$E_{os}^{(1)}(t) = T^{(1)}(t) + V_p(x)$$

$$E_{os}^{(1)}(t) = \frac{m}{2} \left(\omega A_m \cos(\omega t + \phi) - \frac{\lambda A_m^2}{3\omega} \sin(2\omega t + \phi) + \left(\frac{2}{\beta\omega} + \frac{\lambda^2}{\beta^2\omega^5} + \frac{4A_m^2}{6\omega} \right) \sin(\omega t) \right)^2 + \frac{k(x^{(1)}(t))^2}{2} - \frac{m\lambda(x^{(1)}(t))}{\beta} - \frac{m\lambda(x^{(1)}(t))^3}{3} \quad (30)$$

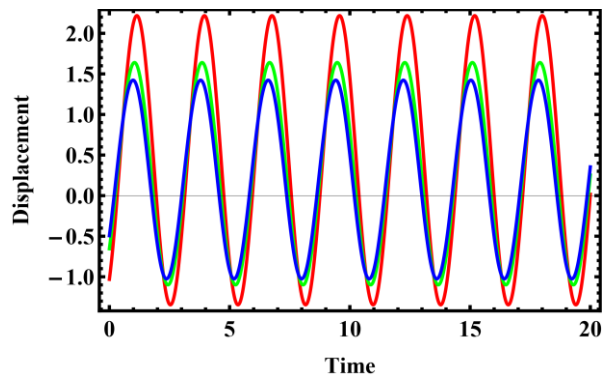
4. นำสมการของการกระจัดของการสั่นของอนุภาคมวล m ที่เป็นฟังก์ชันของเวลา ความเร็วของอนุภาคมวล m และ ความเร่งของอนุภาคมวล m ที่เคลื่อนที่ภายใต้พลังงานศักย์ในระบบการสั่นแบบ Simple Harmonic Oscillator แบบ ไม่สมมาตร [7] มาทำการสร้างกราฟในหัวข้อ ผลการวิจัยและอภิปรายผลการวิจัย ต่อไป

ผลการวิจัยและอภิปรายผลการวิจัย

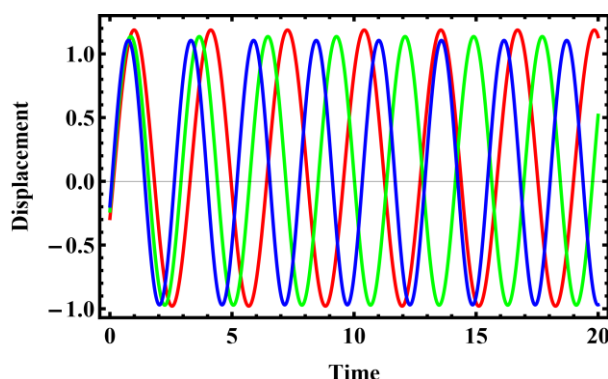
จากสมการที่ (26) สามารถทำการแสดงข้อมูลของการกระจัดของการสั่นของอนุภาคมวล m ที่เป็นฟังก์ชันของเวลาภายใต้พลังงานศักย์ในระบบการสั่นแบบ Simple Harmonic Oscillator แบบไม่สมมาตรในหัวข้อผลการวิจัย ดังนี้



(a) $\lambda = 0.1 \rightarrow 0.7$

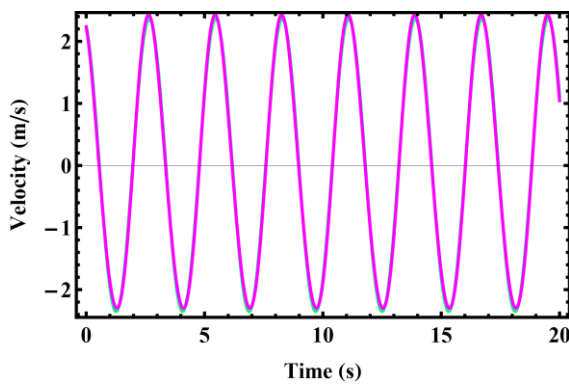


(b) $\beta = 0.3 \rightarrow 0.7$

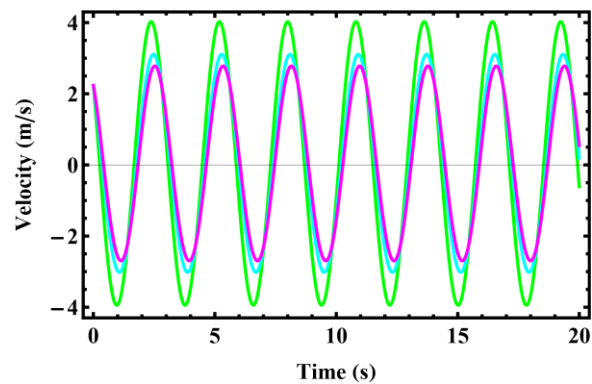


(d) $k = 0.4 \rightarrow 0.6 \text{ N/m}$

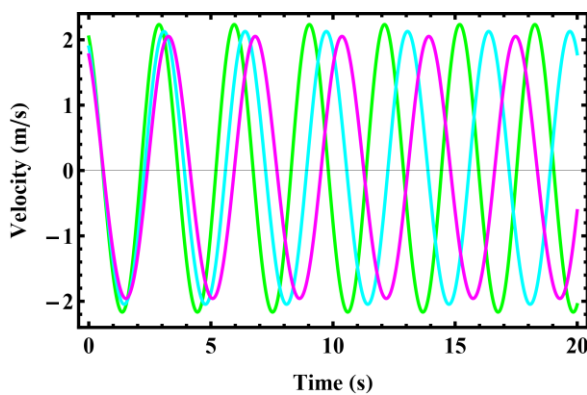
อนุภาคมวล m ที่เป็นฟังก์ชันของเวลาแปรผันโดยตรงกับค่าของพารามิเตอร์ของมวลอนุภาค m จากภาพที่ 2(d) เส้นกราฟสีแดงของการกระจัดของการสั่นของอนุภาคมวล m ที่เป็นฟังก์ชันของเวลา เมื่อ $k = 0.40$ และเส้นกราฟสีเขียวของการกระจัดของการสั่นของอนุภาคมวล m ที่เป็นฟังก์ชันของเวลา เมื่อ $k = 0.50$ สุดท้าย เส้นกราฟสีน้ำเงินของการกระจัดของการสั่นของอนุภาคมวล m ที่เป็นฟังก์ชันของเวลา เมื่อ $k = 0.60$ ถ้าค่าของพารามิเตอร์ค่าคงที่ของสปริง k มีค่าเพิ่มขึ้นจะทำให้การกระจัดของการสั่นของอนุภาคมวล m ที่เป็นฟังก์ชันของเวลาที่มีแอมพลิจูดที่ลดลงตรงข้าม แสดงว่า การกระจัดของการสั่นของอนุภาคมวล m ที่เป็นฟังก์ชันของเวลาแปรผกผันกับค่าของพารามิเตอร์ค่าคงที่ของสปริง k จากสมการที่ (27) คือ ความเร็วของอนุภาคมวล m ที่เป็นฟังก์ชันของเวลาที่เกิดการสั่นภายใต้พลังงานศักย์ที่มีค่าพารามิเตอร์ λ, β, k, m ดังภาพที่ (3)



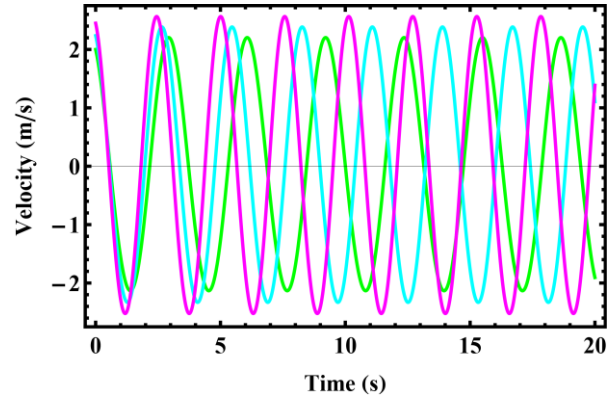
(a) $\lambda = 0.1 \rightarrow 0.7$



(b) $\beta = 0.3 \rightarrow 0.7$



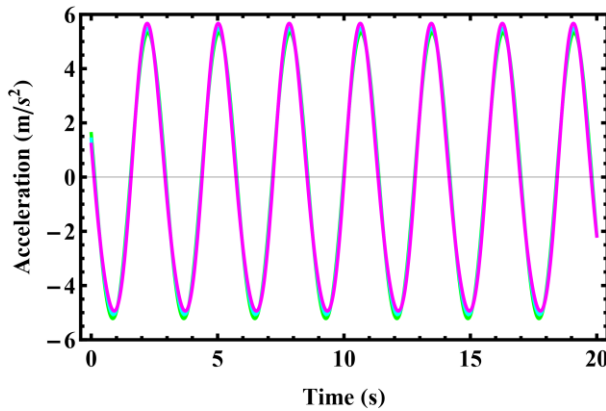
(c) $m = 0.12 \rightarrow 0.16 \text{ kg}$



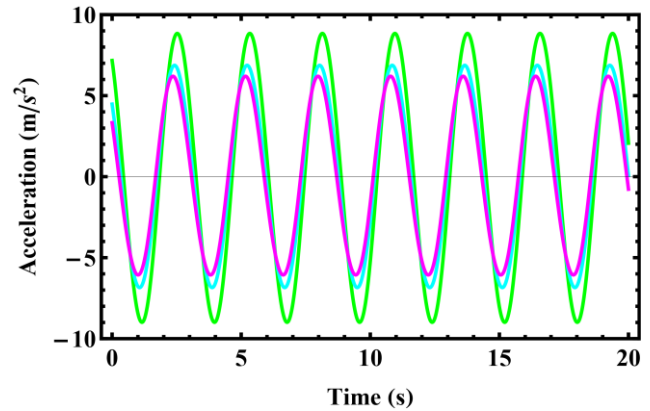
(d) $k = 0.4 \rightarrow 0.6 \text{ N/m}$

ภาพที่ 3 ความเร็วของอนุภาคมวล m ที่เป็นฟังก์ชันของเวลา ของระบบที่เกิดการสั่นภายใต้ค่าพารามิเตอร์ λ, β, k, m

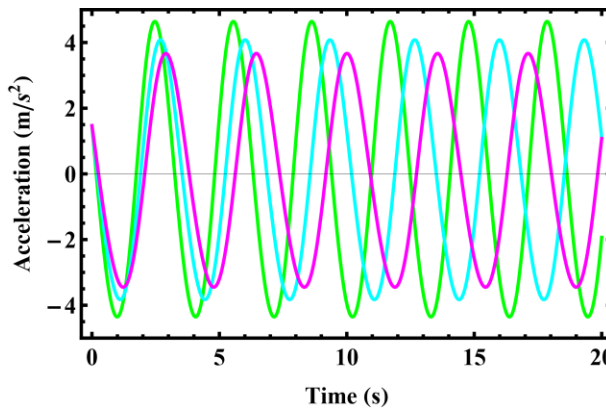
จากภาพที่ 3(a) เส้นกราฟสีเขียวของความเร็วของการสั่นของอนุภาคมวล m ที่เป็นฟังก์ชันของเวลา เมื่อ $\lambda = 0.10$ และเส้นกราฟสีฟ้าน้ำทะเลของความเร็วของการสั่นของอนุภาคมวล m ที่เป็นฟังก์ชันของเวลา เมื่อ $\lambda = 0.40$ สุดท้าย เส้นกราฟสีชมพูของความเร็วของการสั่นของอนุภาคมวล m ที่เป็นฟังก์ชันของเวลา เมื่อ $\lambda = 0.70$ ถ้าค่าของพารามิเตอร์ λ มีค่าเพิ่มขึ้นจะทำให้ความเร็วของการสั่นของอนุภาคมวล m ที่เป็นฟังก์ชันของเวลามีแอมพลิจูดที่เพิ่มขึ้นด้วย แสดงว่า ความเร็วของการสั่นของอนุภาคมวล m ที่เป็นฟังก์ชันของเวลาแปรผันโดยตรงกับค่าของพารามิเตอร์ λ จากภาพที่ 3(b) เส้นกราฟสีเขียวของความเร็วของการสั่นของอนุภาคมวล m ที่เป็นฟังก์ชันของเวลา เมื่อ $\beta = 0.30$ และเส้นกราฟสีฟ้าน้ำทะเลของความเร็วของการสั่นของอนุภาคมวล m ที่เป็นฟังก์ชันของเวลา เมื่อ $\beta = 0.50$ สุดท้าย เส้นกราฟสีชมพูของความเร็วของการสั่นของอนุภาคมวล m ที่เป็นฟังก์ชันของเวลา เมื่อ $\beta = 0.70$ ถ้าค่าของพารามิเตอร์ β มีค่าเพิ่มขึ้นจะทำให้ความเร็วของการสั่นของอนุภาคมวล m ที่เป็นฟังก์ชันของเวลามีแอมพลิจูดที่ลดลงตรงข้าม แสดงว่า ความเร็วของการสั่นของอนุภาคมวล m ที่เป็นฟังก์ชันของเวลาแปรผกผันกับค่าของพารามิเตอร์ β จากภาพที่ 3(c) เส้นกราฟสีเขียวของความเร็วของการสั่นของอนุภาคมวล m ที่เป็นฟังก์ชันของเวลา เมื่อ $m = 0.12 \text{ kg}$ และเส้นกราฟสีฟ้าน้ำทะเลของความเร็วของการสั่นของอนุภาคมวล m ที่เป็นฟังก์ชันของเวลา เมื่อ $m = 0.14 \text{ kg}$ สุดท้าย เส้นกราฟสีชมพูของความเร็วของการสั่นของอนุภาคมวล m ที่เป็นฟังก์ชันของเวลา เมื่อ $m = 0.16 \text{ kg}$ ถ้าค่าของพารามิเตอร์ของมวลอนุภาค m มีค่าเพิ่มขึ้นจะทำให้ความเร็วของการสั่นของอนุภาคมวล m ที่เป็นฟังก์ชันของเวลามีแอมพลิจูดที่เพิ่มขึ้นด้วย แสดงว่า ความเร็วของการสั่นของอนุภาคมวล m ที่เป็นฟังก์ชันของเวลาแปรผันโดยตรงกับค่าของพารามิเตอร์ของมวลอนุภาค m จากภาพที่ 3(d) เส้นกราฟสีเขียวของความเร็วของการสั่นของอนุภาคมวล m ที่เป็นฟังก์ชันของเวลา เมื่อ $k = 0.40$ และเส้นกราฟสีฟ้าน้ำทะเลของความเร็วของการสั่นของอนุภาคมวล m ที่เป็นฟังก์ชันของเวลา เมื่อ $k = 0.50$ สุดท้าย เส้นกราฟสีชมพูของความเร็วของการสั่นของอนุภาคมวล m ที่เป็นฟังก์ชันของเวลา เมื่อ $k = 0.60$ ถ้าค่าของพารามิเตอร์ค่าคงที่ของสปริง k มีค่าเพิ่มขึ้นจะทำให้ความเร็วของการสั่นของอนุภาคมวล m ที่เป็นฟังก์ชันของเวลามีแอมพลิจูดที่ลดลงตรงข้าม แสดงว่า ความเร็วของการสั่นของอนุภาคมวล m ที่เป็นฟังก์ชันของเวลาแปรผกผันกับค่าคงที่ของสปริง k จากสมการที่ (28) คือ ความเร่งของอนุภาคมวล m ที่เป็นฟังก์ชันของเวลาที่เกิดการสั่นภายใต้พลังงานศักย์ที่มีค่าพารามิเตอร์ λ, β, k, m ดังภาพที่ (4)



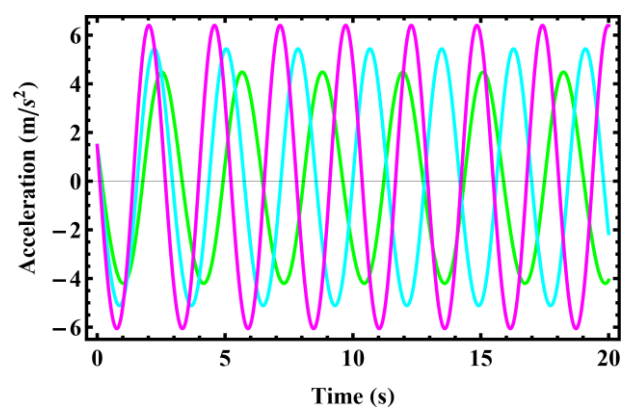
(a) $\lambda = 0.1 \rightarrow 0.7$



(b) $\beta = 0.3 \rightarrow 0.7$



(c) $m = 0.12 \rightarrow 0.16 \text{ kg}$

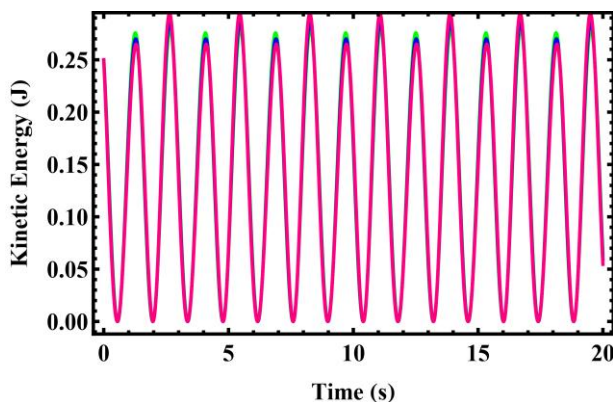


(d) $k = 0.4 \rightarrow 0.6 \text{ N/m}$

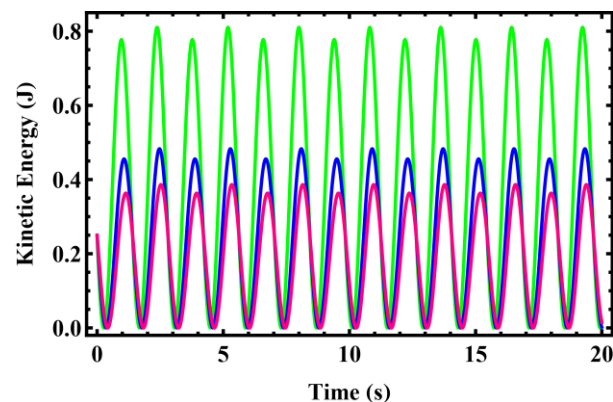
ภาพที่ 4 ความเร่งของการสั่นของอนุภาคมวล m ที่เป็นฟังก์ชันของเวลาขึ้นอยู่กับค่าพารามิเตอร์ λ , β , k , m

จากภาพที่ 4(a) เส้นกราฟสีเขียวของความเร่งของการสั่นของอนุภาคมวล m ที่เป็นฟังก์ชันของเวลา เมื่อ $\lambda = 0.10$ และเส้นกราฟสีฟ้าน้ำทะเลของความเร่งของการสั่นของอนุภาคมวล m ที่เป็นฟังก์ชันของเวลา เมื่อ $\lambda = 0.40$ สุดท้าย เส้นกราฟสีชมพูของความเร่งของการสั่นของอนุภาคมวล m ที่เป็นฟังก์ชันของเวลา เมื่อ $\lambda = 0.70$ ถ้าค่าของพารามิเตอร์ λ มีค่าเพิ่มขึ้นจะทำให้ความเร่งของการสั่นของอนุภาคมวล m ที่เป็นฟังก์ชันของเวลามีแอมพลิจูดที่เพิ่มขึ้นด้วย แสดงว่า ความเร่งของการสั่นของอนุภาคมวล m ที่เป็นฟังก์ชันของเวลาแปรผันโดยตรงกับค่าของพารามิเตอร์ λ จากภาพที่ 4(b) เส้นกราฟสีเขียวของความเร่งของการสั่นของอนุภาคมวล m ที่เป็นฟังก์ชันของเวลา เมื่อ $\beta = 0.30$ และเส้นกราฟสีฟ้าน้ำทะเลของความเร่งของการสั่นของอนุภาคมวล m ที่เป็นฟังก์ชันของเวลา เมื่อ $\beta = 0.50$ สุดท้าย เส้นกราฟสีชมพูของความเร่งของการสั่นของอนุภาคมวล m ที่เป็นฟังก์ชันของเวลา เมื่อ $\beta = 0.70$ ถ้าค่าของพารามิเตอร์ β มีค่าเพิ่มขึ้นจะทำให้ความเร่งของการสั่นของอนุภาคมวล m ที่เป็นฟังก์ชันของ

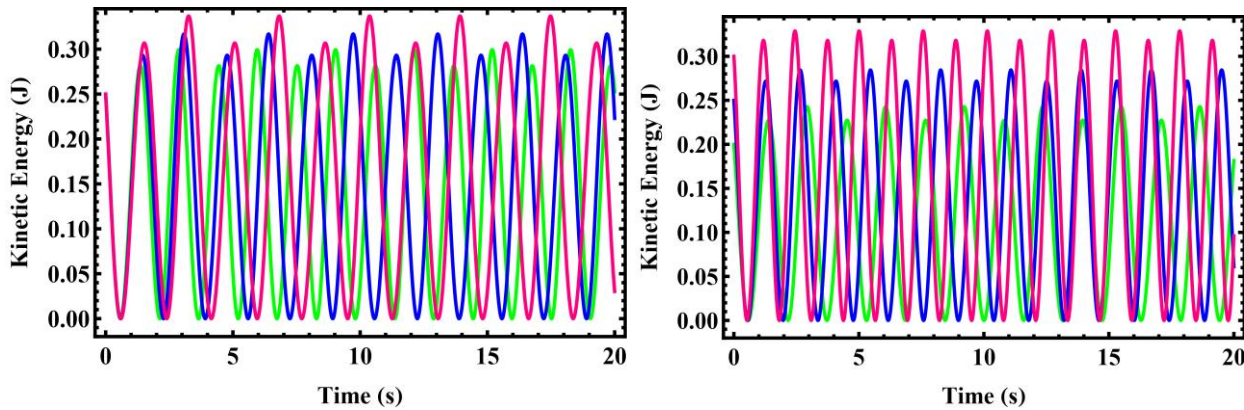
เวลามีแอมพลิจูดที่ลดลงตรงข้าม แสดงว่า ความเร่งของการสั่นของอนุภาคมวล m ที่เป็นฟังก์ชันของเวลาแปรผกผันกับค่าของพารามิเตอร์ β จากภาพที่ 4(c) เส้นกราฟสีเขียวของความเร่งของการสั่นของอนุภาคมวล m ที่เป็นฟังก์ชันของเวลา เมื่อ $m = 0.12 \text{ kg}$ และเส้นกราฟสีฟ้าน้ำทะเลของความเร่งของการสั่นของอนุภาคมวล m ที่เป็นฟังก์ชันของเวลา เมื่อ $m = 0.14 \text{ kg}$ สุดท้าย เส้นกราฟสีชมพูของความเร่งของการสั่นของอนุภาคมวล m ที่เป็นฟังก์ชันของเวลา เมื่อ $m = 0.16 \text{ kg}$ ถ้าค่าของพารามิเตอร์ของมวลอนุภาค m มีค่าเพิ่มขึ้นจะทำให้ความเร่งของการสั่นของอนุภาคมวล m ที่เป็นฟังก์ชันของเวลามีแอมพลิจูดที่เพิ่มขึ้นด้วย แสดงว่า ความเร่งของการสั่นของอนุภาคมวล m ที่เป็นฟังก์ชันของเวลาแปรผกผันโดยตรงกับค่าของพารามิเตอร์ของมวลอนุภาค m จากภาพที่ 4(d) เส้นกราฟสีเขียวของความเร่งของการสั่นของอนุภาคมวล m ที่เป็นฟังก์ชันของเวลา เมื่อ $k = 0.40$ และเส้นกราฟสีฟ้าน้ำทะเลของความเร่งของการสั่นของอนุภาคมวล m ที่เป็นฟังก์ชันของเวลา เมื่อ $k = 0.50$ สุดท้าย เส้นกราฟสีชมพูของความเร่งของการสั่นของอนุภาคมวล m ที่เป็นฟังก์ชันของเวลา เมื่อ $k = 0.60$ ถ้าค่าของพารามิเตอร์ค่าคงที่ของสปริง k มีค่าเพิ่มขึ้นจะทำให้ความเร่งของการสั่นของอนุภาคมวล m ที่เป็นฟังก์ชันของเวลามีแอมพลิจูดที่ลดลงตรงข้าม แสดงว่า ความเร่งของการสั่นของอนุภาคมวล m ที่เป็นฟังก์ชันของเวลาแปรผกผันกับค่าคงที่ของสปริง k จากสมการที่ (29) คือ พลังงานจลน์ของอนุภาคมวล m ที่เป็นฟังก์ชันของเวลาที่เกิดการสั่นภายใต้พลังงานศักย์ที่มีค่าพารามิเตอร์ λ, β, k, m ดังภาพที่ (5)



(a) $\lambda = 0.1 \rightarrow 0.7$



(b) $\beta = 0.3 \rightarrow 0.7$

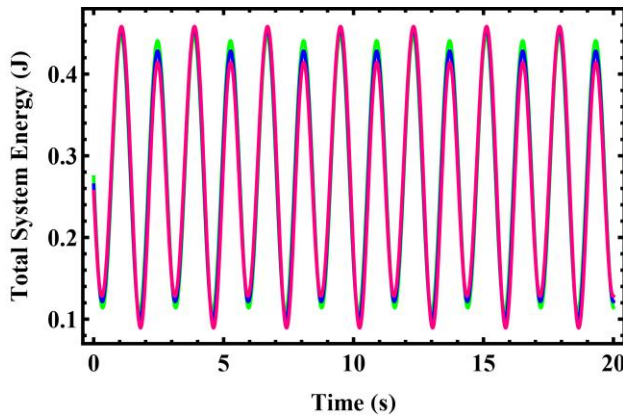

 (c) $m = 0.12 \rightarrow 0.16 \text{ kg}$

 (d) $k = 0.4 \rightarrow 0.6 \text{ N/m}$

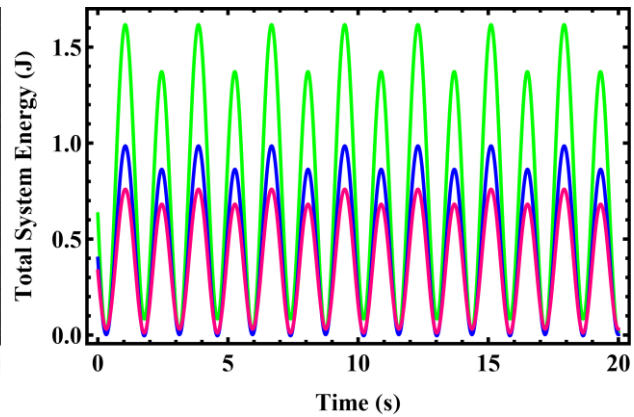
ภาพที่ 5 พลังงานจลน์ของการสั่นของอนุภาคมวล m ที่เป็นฟังก์ชันของเวลาขึ้นอยู่กับค่าพารามิเตอร์ λ , β , k , m

จากภาพที่ 5(a) เส้นกราฟสีเขียวของพลังงานจลน์ของการสั่นของอนุภาคมวล m ที่เป็นฟังก์ชันของเวลา เมื่อ $\lambda = 0.10$ และเส้นกราฟสีน้ำเงินของพลังงานจลน์ของการสั่นของอนุภาคมวล m ที่เป็นฟังก์ชันของเวลา เมื่อ $\lambda = 0.40$ สุดท้าย เส้นกราฟสีบานเย็นของพลังงานจลน์ของการสั่นของอนุภาคมวล m ที่เป็นฟังก์ชันของเวลา เมื่อ $\lambda = 0.70$ ถ้าค่าของพารามิเตอร์ λ มีค่าเพิ่มขึ้นจะทำให้พลังงานจลน์ของการสั่นของอนุภาคมวล m ที่เป็นฟังก์ชันของเวลามีแอมพลิจูดที่เพิ่มขึ้นด้วย แสดงว่า พลังงานจลน์ของการสั่นของอนุภาคมวล m ที่เป็นฟังก์ชันของเวลาแปรผันโดยตรงกับค่าของพารามิเตอร์ λ จากภาพที่ 5(b) เส้นกราฟสีเขียวของพลังงานจลน์ของการสั่นของอนุภาคมวล m ที่เป็นฟังก์ชันของเวลา เมื่อ $\beta = 0.30$ และเส้นกราฟสีน้ำเงินของพลังงานจลน์ของการสั่นของอนุภาคมวล m ที่เป็นฟังก์ชันของเวลา เมื่อ $\beta = 0.50$ สุดท้าย เส้นกราฟสีบานเย็นของพลังงานจลน์ของการสั่นของอนุภาคมวล m ที่เป็นฟังก์ชันของเวลา เมื่อ $\beta = 0.70$ ถ้าค่าของพารามิเตอร์ β มีค่าเพิ่มขึ้นจะทำให้พลังงานจลน์ของการสั่นของอนุภาคมวล m ที่เป็นฟังก์ชันของเวลามีแอมพลิจูดที่ลดลงตรงข้าม แสดงว่า พลังงานจลน์ของการสั่นของอนุภาคมวล m ที่เป็นฟังก์ชันของเวลาแปรผกผันกับค่าของพารามิเตอร์ β จากภาพที่ 5(c) เส้นกราฟสีเขียวของพลังงานจลน์ของการสั่นของอนุภาคมวล m ที่เป็นฟังก์ชันของเวลา เมื่อ $m = 0.12 \text{ kg}$ และเส้นกราฟสีน้ำเงินของพลังงานจลน์ของการสั่นของอนุภาคมวล m ที่เป็นฟังก์ชันของเวลา เมื่อ $m = 0.14 \text{ kg}$ สุดท้าย เส้นกราฟสีบานเย็นของพลังงานจลน์ของการสั่นของอนุภาคมวล m ที่เป็นฟังก์ชันของเวลา เมื่อ $m = 0.16 \text{ kg}$ ถ้าค่าของพารามิเตอร์ของมวลอนุภาค m มีค่าเพิ่มขึ้นจะทำให้พลังงานจลน์ของการสั่นของอนุภาคมวล m ที่เป็นฟังก์ชันของเวลามีแอมพลิจูดที่เพิ่มขึ้นด้วย แสดงว่า พลังงานจลน์ของการสั่นของอนุภาคมวล m ที่เป็นฟังก์ชันของเวลาแปรผันโดยตรงกับค่าของพารามิเตอร์ของมวลอนุภาค m จากภาพที่ 5(d) เส้นกราฟสีเขียวของพลังงานจลน์ของการสั่นของอนุภาคมวล m ที่เป็นฟังก์ชันของเวลา เมื่อ $k = 0.40$ และเส้นกราฟสีน้ำเงินของพลังงานจลน์ของการสั่นของอนุภาคมวล m ที่เป็นฟังก์ชันของเวลา

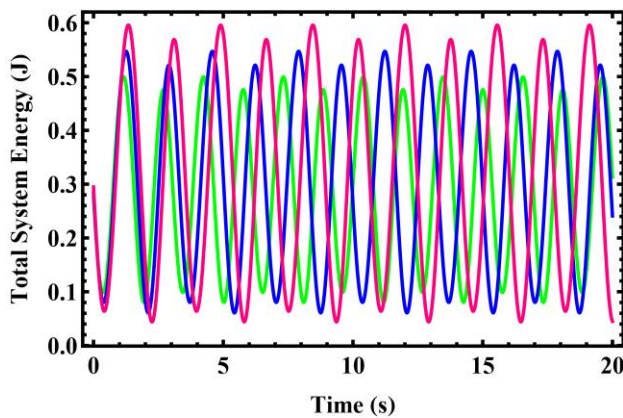
เมื่อ $k = 0.50$ สุดท้าย เส้นกราฟสีบานเย็นของพลังงานจลน์ของการสั่นของอนุภาคมวล m ที่เป็นฟังก์ชันของเวลา เมื่อ $k = 0.60$ ถ้าค่าของพารามิเตอร์ค่าคงที่ของสปริง k มีค่าเพิ่มขึ้นจะทำให้พลังงานจลน์ของการสั่นของอนุภาคมวล m ที่เป็นฟังก์ชันของเวลา มีแอมพลิจูดที่ลดลงตรงข้าม แสดงว่า พลังงานจลน์ของการสั่นของอนุภาคมวล m ที่เป็นฟังก์ชันของเวลาแปรผกผันกับค่าของพารามิเตอร์ค่าคงที่ของสปริง k



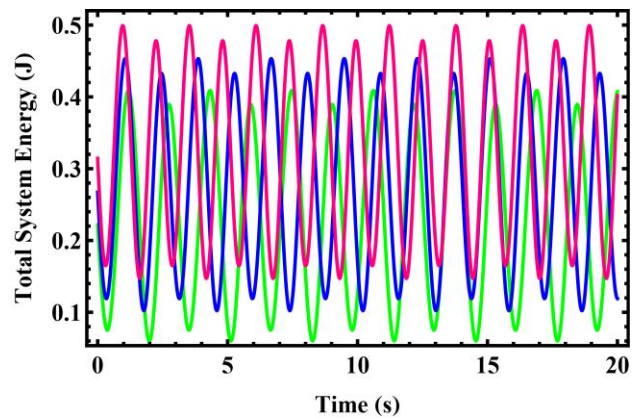
(a) $\lambda = 0.1 \rightarrow 0.7$



(b) $\beta = 0.3 \rightarrow 0.7$

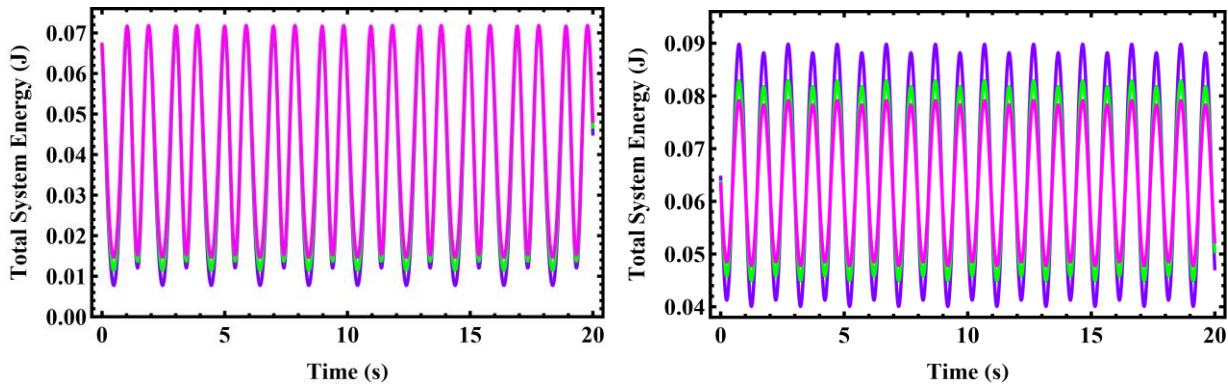


(c) $m = 0.12 \rightarrow 0.16 \text{ kg}$



(d) $k = 0.4 \rightarrow 0.6 \text{ N/m}$

ภาพที่ 6 พลังงานรวมของการสั่นของอนุภาคมวล m ที่เป็นฟังก์ชันของเวลาขึ้นอยู่กับค่าพารามิเตอร์ λ, β, k, m



(a) $\lambda = 11.5 > \beta = 9.0, 9.5, 10.0$

(b) $\lambda = 0.1 < \beta = 2.5, 3.5, 4.5$

ภาพที่ 7 พลังงานรวมของการสั่นของอนุภาคมวล m ที่เป็นฟังก์ชันของเวลาขึ้นอยู่กับค่าพารามิเตอร์ λ , β , k , m

จากภาพที่ 7(a) ค่าพลังงานในช่วงแอมพลิจูดพลังงานรวมระบบด้านล่างมีการแกว่งไม่สม่ำเสมอเมื่อเวลาเพิ่มมากขึ้น แต่แอมพลิจูดของพลังงานรวมระบบด้านบน จะมีการแกว่งสม่ำเสมอเมื่อเวลาเพิ่มมากขึ้น ในกรณีที่ค่าพารามิเตอร์ $\lambda = 11.5 > \beta = 9.0, 9.5, 10.0$ เป็นผลมาจากค่าพลังงานศักย์ในสมการที่ (1) ทำให้พจน์ของ $m\lambda x^3/3$ มีค่าแบบเด่นชัดเจน ต่อมาจากภาพที่ 7(b) ค่าพลังงานในช่วงแอมพลิจูดพลังงานรวมระบบด้านล่างมีการแกว่งไม่สม่ำเสมอเมื่อเวลาเพิ่มมากขึ้น แต่แอมพลิจูดของพลังงานรวมระบบด้านบนจะมีการแกว่งไม่สม่ำเสมอเมื่อเวลาเพิ่มมากขึ้น ในกรณีที่ค่าพารามิเตอร์ $\lambda = 0.1 < \beta = 2.5, 3.5, 4.5$ เป็นผลมาจากค่าพลังงานศักย์ในสมการที่ (1) ทำให้พจน์ของ $m\lambda x/\beta$

สรุปผลการวิจัย

การกระจัดของการสั่นของอนุภาคมวล m ที่เป็นฟังก์ชันของเวลาแปรผันโดยตรงกับค่าพารามิเตอร์ λ และมวลของอนุภาค แต่การกระจัดของการสั่นของอนุภาคมวล m ที่เป็นฟังก์ชันของเวลาแปรผกผันกับค่าพารามิเตอร์ β และค่าคงที่ของสปริง k ต่อมาความเร็วของการสั่นของอนุภาคมวล m ที่เป็นฟังก์ชันของเวลาแปรผันโดยตรงกับค่าพารามิเตอร์ λ และมวลของอนุภาค แต่ความเร็วของการสั่นของอนุภาคมวล m ที่เป็นฟังก์ชันของเวลาแปรผกผันกับค่าพารามิเตอร์ β และค่าคงที่ของสปริง k ความเร่งของการสั่นของอนุภาคมวล m ที่เป็นฟังก์ชันของเวลาแปรผันโดยตรงกับค่าพารามิเตอร์ λ และมวลของอนุภาค แต่ความเร่งของการสั่นของอนุภาคมวล m ที่เป็นฟังก์ชันของเวลาแปรผกผันกับค่าพารามิเตอร์ β และค่าคงที่ของสปริง k พลังงานจลน์ของการสั่นของอนุภาคมวล m ที่เป็นฟังก์ชันของเวลาแปรผันโดยตรงกับค่าพารามิเตอร์ λ และมวลของอนุภาค แต่พลังงานจลน์ของการสั่นของอนุภาคมวล m ที่เป็นฟังก์ชันของเวลาแปรผกผันกับค่าพารามิเตอร์ β และค่าคงที่ของสปริง k

กิตติกรรมประกาศ (ถ้ามี)

ขอขอบคุณคณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเพชรบูรณ์ที่ให้การสนับสนุนด้านสถานที่และเวลาในการทำงานวิจัย จนกระทั่งงานสำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี

เอกสารอ้างอิง

- [1] รัชณี รุจิวิโรตม. (2558). *กลศาสตร์ 1*. สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- [2] Atam, P. A. (1990). *Introduction to classical mechanics*. Prentice-Hall.
- [3] Saptip, C., Moonsri, P., & Hutem, A. (2021). Calculation of displacement and velocity of particle perturbation by time-dependent external force of cosine and sine function. *Journal of Science and Technology Phetchabun Rajabhat University*, 1(2), 1–14. <https://so04.tci-thaijo.org/index.php/jstpcru/article/view/253601>
- [4] Farid, M. (2023). Dynamics of a hybrid cubic vibro-impact oscillator and nonlinear energy sink. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 117, Article 106978. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2022.106978>
- [5] Cveticanin, L. (2012). A review on dynamics of mass variable systems. *Journal of the Serbian Society for Computational Mechanics*, 6(1), 56–73. https://www.sscm.kg.ac.rs/jsscm/downloads/Vol6No1/Vol6No1_04.pdf
- [6] Bao, X., et al. (2026). Amplitude-frequency response characteristics and parameter optimization of a bistable nonlinear energy sink under wide-frequency harmonic excitation. *Materials*, 19(1176), 1–22. <https://doi.org/10.3390/ma19061176>
- [7] Big-Alabo, A. (2021). Exact analysis of the nonlinear vibration of an archetypal non-natural oscillator. *European Physical Journal Plus*, 136, Article 107. <https://doi.org/10.1140/epjp/s13360-021-01053-5>
- [8] Kuaykaew, S., Kerdmee, S., Banyenugam, P., Moonsri, P., & Hutem, A. (2016). The analytical description of projectile motion of cricket ball in a linear resisting medium the storm force. *Applied Mechanics and Materials*, 855, 188–191. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMM.855.188>

- [9] Hutem, A., Suwanwong, S., & Wanaek, A. (2023). Calculation of velocity and displacement as function of time of body in the vertical movement under gravitational field. *Journal of Earth Science, Astronomy and Space*, 6(1), 29–46.
- [10] Hutem, A. (2023). Calculation of the time-dependent velocity and displacement of particle move under time-dependent external force of damping oscillation. *Journal of Science and Technology CRRU*, 2(1), 1–7.
- [11] Hutem, A. (2024). Angular displacement angular velocity and tension force of particle in the pendulum motion under drag force and time-dependent external force. *Journal of Science and Technology CRRU*, 3(1), 48–65. <https://li01.tci-thaijo.org/index.php/jstcrru/article/view/262164>