

สมการไดโอแฟนไทน์ $n^x - 5^y = z^2$ เมื่อ $n \equiv 11(\text{mod } 20)$ On the Diophantine Equation $n^x - 5^y = z^2$ where $n \equiv 11(\text{mod } 20)$

สุธน ตาดิ*

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเทพสตรี

Suton Tadee*

Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Thepsatri Rajabhat University

บทคัดย่อ

ในงานวิจัยนี้จะแสดงว่า $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ เป็นผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียงผลเฉลยเดียวของสมการไดโอแฟนไทน์ $n^x - 5^y = z^2$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่ $n \equiv 11(\text{mod } 20)$

คำสำคัญ : สมการไดโอแฟนไทน์, ผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

Abstract

In this paper, we show that $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ is the unique non-negative integer solution of the Diophantine equation $n^x - 5^y = z^2$, where n is a positive integer with $n \equiv 11(\text{mod } 20)$.

Keywords : Diophantine equation, Non-negative integer solution

ที่มาและความสำคัญ

เมื่อไม่นานมานี้ สมการไดโอแฟนไทน์ (Diophantine equation) ที่อยู่ในรูป $a^x - b^y = z^2$ เมื่อ a, b เป็นจำนวนเต็มบวก และ x, y, z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ได้รับความสนใจอย่างกว้างขวาง ตัวอย่างเช่น ในปี ค.ศ. 2019 Thongnak, Chuayjan และ Kaewong [8] ได้แสดงว่า สมการไดโอแฟนไทน์ $2^x - 3^y = z^2$ มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบสามผลเฉลย คือ $(x, y, z) \in \{(0, 0, 0), (1, 0, 1), (2, 1, 1)\}$ และ Burshtein [1, 2, 3] ได้

* Corresponding author : suton.t@lawasri.tru.ac.th

ศึกษาผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวกของสมการไดโอแฟนไทน์ $6^x - 11^y = z^2$, $p^x - p^y = z^2$, $(p+1)^x - p^y = z^2$ และ $p^y - (p+1)^x = z^2$ เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะ และต่อมาในปี ค.ศ. 2020 Burshtein [4] ได้พิสูจน์ว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $13^x - 5^y = z^2$ มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวกเพียงผลเฉลยเดียว คือ $(x, y, z) = (2, 2, 12)$ ในขณะที่ สมการไดโอแฟนไทน์ $19^x - 5^y = z^2$ ไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวก และในปีเดียวกัน Elshahed และ Kamarulhaili [5] ได้ค้นพบผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบทั้งหมดของสมการไดโอแฟนไทน์ $(4^n)^x - p^y = z^2$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก และ p เป็นจำนวนเฉพาะคี่ ในปี ค.ศ. 2022 Tadee และ Laomalaw [7] ได้แสดงผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบของสมการไดโอแฟนไทน์ $n^x - n^y = z^2$ และ $2^x - p^y = z^2$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n \neq 1$ และบางจำนวนเฉพาะ p และ Thongnak, Chuayjan และ Kaewong [9] ได้พิสูจน์ว่า $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ เป็นผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียงผลเฉลยเดียวของสมการไดโอแฟนไทน์ $7^x - 2^y = z^2$ นอกจากนี้ Orosram และ Unchai [6] ได้ศึกษาผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบของสมการไดโอแฟนไทน์ $2^{2nx} - p^y = z^2$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก และ p เป็นจำนวนเฉพาะ

ในงานวิจัยนี้จะพิสูจน์ว่าสมการไดโอแฟนไทน์

$$n^x - 5^y = z^2 \quad (1)$$

มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียงผลเฉลยเดียว คือ $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก และ $n \equiv 11 \pmod{20}$ ซึ่งในการพิสูจน์ดังกล่าวจะใช้ความรู้เบื้องต้นทางทฤษฎีจำนวน

วิธีการดำเนินการวิจัย

ทฤษฎีบท 1 ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่ $n \equiv 11 \pmod{20}$ จะได้ว่า สมการ (1) มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียงผลเฉลยเดียว คือ $(x, y, z) = (0, 0, 0)$

พิสูจน์ ให้ x, y และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ และเป็นผลเฉลยของสมการ (1) เนื่องจาก $n \equiv 11 \pmod{20}$ ดังนั้น $n \equiv 3 \pmod{4}$ เพราะฉะนั้น n เป็นจำนวนคี่ และจากสมการ (1) จะได้ว่า z เป็นจำนวนคู่ ดังนั้น $z^2 \equiv 0 \pmod{4}$ และเนื่องจาก $n \equiv 3 \equiv -1 \pmod{4}$ ดังนั้น $n^x \equiv (-1)^x \pmod{4}$ และจาก $5 \equiv 1 \pmod{4}$ ดังนั้น $5^y \equiv (1)^y \equiv 1 \pmod{4}$ เพราะฉะนั้น $n^x - 5^y \equiv (-1)^x - 1 \pmod{4}$ และจากสมการ (1) จะได้ว่า $z^2 \equiv (-1)^x - 1 \pmod{4}$ เพราะฉะนั้น $(-1)^x - 1 \equiv 0 \pmod{4}$ ดังนั้น x เป็นจำนวนคู่ จะได้ว่า มีจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ k ที่ทำให้ $x = 2k$ ดังนั้น

$$5^y = n^{2k} - z^2 = (n^k - z)(n^k + z) \quad (2)$$

และจาก 5 เป็นจำนวนเฉพาะ ดังนั้น จะมีจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ u ซึ่งทำให้

$$n^k - z = 5^u \quad (3)$$

และ

$$n^k + z = 5^{y-u} \quad (4)$$

จากสมการ (3) และ (4) จะได้ว่า $y \geq 2u$ และ

$$2n^k = 5^u(5^{y-2u} + 1) \quad (5)$$

เนื่องจาก $n \equiv 11 \pmod{20}$ ดังนั้น $n \equiv 1 \pmod{5}$ เพราะฉะนั้น 5 ไม่ได้เป็นตัวประกอบของ n และจากสมการ (5) จะได้ว่า $u = 0$ และ $2n^k = 5^y + 1$ และจาก $n \equiv 1 \pmod{5}$ ดังนั้น $2n^k \equiv 2(1)^k \equiv 2 \pmod{5}$ เพราะฉะนั้น $5^y + 1 \equiv 2 \pmod{5}$ ดังนั้น $y = 0$ ทำให้ $n^k = 1$ ด้วยเหตุนี้ $k = 0$ เพราะฉะนั้น $x = 0$ และจากสมการ (1) จะได้ว่า $z = 0$ นั่นคือ $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ เป็นผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียงผลเฉลยเดียวของสมการ (1) $\square$

บทแทรก 2 สมการไดโอแฟนไทน์ $11^x - 5^y = z^2$ และ $31^x - 5^y = z^2$ มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียงผลเฉลยเดียว คือ $(x, y, z) = (0, 0, 0)$

พิสูจน์ เนื่องจาก $11 \equiv 11 \pmod{20}$ และ $31 \equiv 11 \pmod{20}$ ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 1 จะได้ว่า สมการไดโอแฟนไทน์ $11^x - 5^y = z^2$ และ $31^x - 5^y = z^2$ มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียงผลเฉลยเดียว คือ $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ $\square$

บทแทรก 3 ให้ m และ n เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่ $n \equiv 11 \pmod{20}$ จะได้ว่า สมการไดโอแฟนไทน์ $n^x - 5^y = z^{2m}$ มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียงผลเฉลยเดียว คือ $(x, y, z) = (0, 0, 0)$

พิสูจน์ ให้ a, b และ c เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ที่ทำให้ $n^a - 5^b = c^{2m} = (c^m)^2$ จะได้ว่า $(x, y, z) = (a, b, c^m)$ เป็นผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $n^x - 5^y = z^2$ จากทฤษฎีบท 1 จะได้ว่า $(a, b, c^m) = (0, 0, 0)$ เพราะฉะนั้น $a = b = c = 0$ $\square$

สรุปและอภิปรายผลการวิจัย

ในงานวิจัยนี้ได้พิสูจน์ว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $n^x - 5^y = z^2$ มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียงผลเฉลยเดียว คือ $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่ $n \equiv 11 \pmod{20}$ ดังนั้นสิ่งที่น่าสนใจในการศึกษาต่อไป คือ การหาผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบของสมการดังกล่าวในกรณีที่ $n \not\equiv 11 \pmod{20}$

กิตติกรรมประกาศ

ผู้วิจัยขอขอบคุณ สถาบันวิจัยและพัฒนา และคณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเทพสตรี ที่ให้การสนับสนุนในการทำวิจัยครั้งนี้

เอกสารอ้างอิง

- [1] N. Burshtein, (2019). A short note on solutions of the Diophantine equations $6^x + 11^y = z^2$ and $6^x - 11^y = z^2$ in positive integers x, y, z . Annals of Pure and Applied Mathematics, 19(2), 55-56.
- [2] N. Burshtein, (2019). All the solutions of the Diophantine equations $p^x + p^y = z^2$ and $p^x - p^y = z^2$ when $p \geq 2$ is prime. Annals of Pure and Applied Mathematics, 19(2), 111-119.
- [3] N. Burshtein, (2019). All the solutions of the Diophantine equations $(p+1)^x - p^y = z^2$ and $p^y - (p+1)^x = z^2$ when p is prime and $x+y = 2, 3, 4$. Annals of Pure and Applied Mathematics, 19(1), 53-57.
- [4] N. Burshtein, (2020). All the solutions of the Diophantine equations $13^x - 5^y = z^2, 19^x - 5^y = z^2$ in positive integers x, y, z . Annals of Pure and Applied Mathematics, 22(2), 93-96.
- [5] A. Elshahed and H. Kamarulhaili, (2020). On the Diophantine equation $(4^n)^x - p^y = z^2$. WSEAS Transactions on Mathematics, 19, 349-352.
- [6] W. Orosram and A. Unchai, (2022). On the Diophantine equation $2^{2nx} - p^y = z^2$, where p is a prime. International Journal of Mathematics and Computer Science, 17(1), 447-451.
- [7] S. Tadee and N. Laomalaw, (2022). On the Diophantine equations $n^x - n^y = z^2$ and $2^x - p^y = z^2$. Phranakhon Rajabhat Research Journal (Science and Technology), 17(1), 10-16.
- [8] S. Thongnak, W. Chuayjan and T. Kaewong, (2019). On the exponential Diophantine equation $2^x - 3^y = z^2$. Southeast-Asian Journal of Sciences, 7(1), 1-4.
- [9] S. Thongnak, W. Chuayjan and T. Kaewong, (2022). On the Diophantine equation $7^x - 2^y = z^2$ where x, y and z are non-negative integers. Annals of Pure and Applied Mathematics, 25(2), 63-66.