

การคำนวณและเปรียบเทียบระยะทางการดึงลูกตุ้มนาฬิกาเคลื่อนที่แบบซิมเปิลเพนดูลัมภายใต้  
แรงภายนอกที่เป็นฟังก์ชันของเวลา

Evaluation and comparison the distance of pulling pendulum of simple  
pendulum of motion via external force of function time

อาทิตย์ หู้เต็ม\*

ภาควิชาวิทยาศาสตร์ศึกษา คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเพชรบูรณ์ 67000 ไทย

Artit Hutem\*

Department of Science Education, Faculty of Science and Technology, Phetchabun Rajabhat,  
University Phetchabun Province 67000 Thailand

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อคำนวณหาระยะห่างระหว่างลูกตุ้มนาฬิกามวล  $m$  กับจุดสมดุลง โดยใช้กฎการเคลื่อนที่นิวตันในระบบสภาวะสมดุล ใช้เทคนิคทางคณิตศาสตร์เรื่องอนุพันธ์ฟังก์ชัน เมื่อมวลของลูกตุ้มนาฬิกามีขนาดเป็น 0.10 0.15 0.20 และ 0.25 กิโลกรัม ความยาวของเส้นเชือก 1.0 เมตร แรงดึงเป็น  $f_1 = f_{ext1}$  และแรงดึง  $f_2 = f_{ext2} t$  ระยะห่าง  $\eta_1$  และระยะห่าง  $\eta_2$  ผลจากการคำนวณแสดงให้เห็นว่าค่าระยะห่างระหว่างลูกตุ้มนาฬิกามวล  $m$  กับจุดสมดุลงแปรผันโดยตรงกับค่าความยาวเส้นเชือก แต่แปรผกผันกับค่าขนาดของมวลลูกตุ้มนาฬิกา

คำสำคัญ : แรงดึง, แรงดึงในเส้นเชือก, ระยะห่างระหว่างลูกตุ้มนาฬิกา กับจุดสมดุลง

Abstract

This study is to calculate the distance of pendulum and the vertical distance. Using Newton's laws of motion in a system of equilibrium. We can be used mathematical techniques on derivative functions. When the mass of the clock pendulum has dimensions of 0.10, 0.15, 0.20, and 0.25 kg and the size of rope length is 1 m. The distance of pendulum and the vertical in the case of tensile force was compared  $f_1 = f_{ext1}$  and tensile force  $f_2 = f_{ext2} t$ . The results of the calculation can be seen that the distance of pendulum with the vertical line is directly

\*Corresponding author: artithutem@pcru.ac.th

Received : 28/02/2025 Revised : 27/04/2025 Accepted : 17/06/2025

proportional to the length of the rope. The distance of pendulum but inversely proportional to the size of the mass of the clock pendulum.

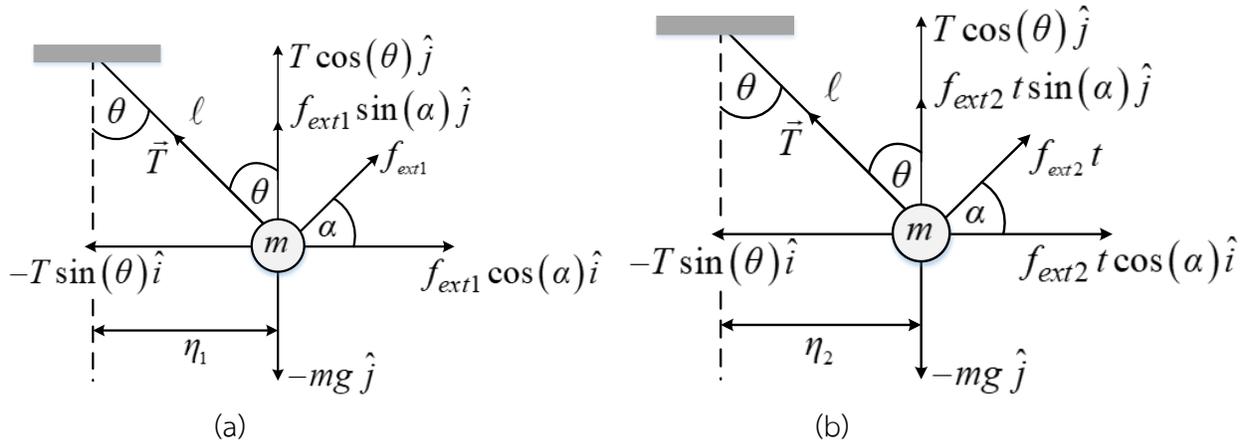
**Keywords :** pull force, tension force, the distance between pendulum and the vertical

### ที่มาและความสำคัญ

ในรายวิชาฟิสิกส์ 1 ในภาคทฤษฎีซึ่งมีเนื้อหาเกี่ยวกับลูกตุ้มนาฬิกามวล  $m$  เคลื่อนที่แบบการเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่ายซึ่งมีการคำนวณเพื่อหาการกระจัดเชิงมุมของลูกตุ้มนาฬิกามวล  $m$  ที่มีการเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย [5,6,7] ซึ่งในระบบนี้พิจารณาพิกัดเชิงขั้ว ไม่คิดแรงภายนอกที่มากระทำต่อลูกตุ้มนาฬิกามวล  $m$  ไม่คิดแรงต้านอากาศ และไม่ได้คำนวณหาแรงตึงเส้นเชือกของระบบ เคลื่อนที่ลูกตุ้มนาฬิกาอย่างง่าย [8,9,10] ต่อมาในรายวิชาปฏิบัติการฟิสิกส์ 1 มีปฏิบัติการเรื่องการเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย เป็นการทดลองที่ใช้มวลของลูกตุ้มมีขนาดคงที่ และมีการกำหนดตัวแปรต้น คือ ความยาวเส้นเชือกที่มีค่าเปลี่ยนแปลงจาก 0.2 เมตร ไปถึง 1.0 เมตร เพื่อทดลองหาค่าคาบของการแกว่งลูกตุ้มนาฬิกามวล  $m$  และคำนวณหาค่าความเร่ง  $g = 9.75 \text{ m/s}^2$  โดยประมาณ เป็นต้น แต่ในงานวิจัยนี้ได้สร้างแบบจำลองการคำนวณหาระยะห่างระหว่างลูกตุ้มนาฬิกามวล  $m$  กับแนวตั้งซึ่งผ่านจุดตรึงของเส้นเชือกยาว  $l$  และมีการเปรียบเทียบระยะห่างระหว่างลูกตุ้มนาฬิกามวล  $m$  กับจุดสมดุลซึ่งผ่านจุดตรึงของเส้นเชือกในกรณีแรงดึง  $f_1 = f_{ext1}$  และแรงดึง  $f_2 = f_{ext2} t$  ระยะห่าง  $\eta_1$  และระยะห่าง  $\eta_2$

### วิธีการดำเนินการวิจัย

ผูกเส้นเชือกที่มีความยาว  $l$  เมตรกับลูกตุ้มนาฬิกาที่มีขนาดมวล  $m$  กิโลกรัมส่วนปลายเส้นเชือกอีกข้างหนึ่งผูกติดกับจุดตรึงแน่นหากมีแรงดึง  $f_1 = f_{ext1}$  โดยที่  $f_{ext1}$  เป็นแรงภายนอกที่เป็นค่าคงที่ มีหน่วยเป็น (a.u.) ซึ่งไม่เป็นฟังก์ชันของเวลา ซึ่งในการทดลองฟิสิกส์ 1 เรื่องการเคลื่อนที่ลูกตุ้มนาฬิกาอย่างง่าย ใช้มือในการดึงลูกตุ้มนาฬิกา ในแต่ละครั้งเมื่อความยาวในเส้นเชือกเปลี่ยน และส่วนแรงดึง  $f_2 = f_{ext2} t$  โดยที่  $f_{ext2} t$  เป็นแรงภายนอกที่เป็นฟังก์ชันของเวลา  $t$  มีตรีโกณมิติหนึ่ง และ  $f_{ext2}$  แรงภายนอกที่เป็นค่าคงที่ มีหน่วยเป็น (a.u./s) และ  $t$  เป็นเวลามีหน่วยเป็นวินาที เช่น แรงจากมอเตอร์ในการกระตุ้น เป็นต้น ซึ่งแรงดึงทั้งสองชนิดกระทำกับลูกตุ้มนาฬิกานั้นในทิศทางหนึ่ง ๆ ดังรูปที่ 1 (a) และรูปที่ 1 (b) ตามลำดับ



ภาพที่ 1 (a) การแตกแรงดึง  $f_1 = f_{ext1}$  และแรงดึงในเส้นเชือกภายในระบบพิกัดฉาก (b) การแตกแรงดึง  $f_2 = f_{ext2} t$  และแรงดึง ( $\vec{T}$ ) ในเส้นเชือกภายในระบบพิกัดฉาก [8,9,10]

โดยงานวิจัยนี้กำหนด  $f_1 = f_{ext1}$  เป็นแรงดึงลูกตุ้มนาฬิกาขนาดมวล  $m$  และ  $\vec{T}$  เป็นแรงดึงในเส้นเชือกที่กระทำกับลูกตุ้มนาฬิกาขนาดมวล  $m$  เนื่องจากเราไม่ทราบว่าลูกตุ้มนาฬิกาขนาดมวล  $m$  เบี่ยงเบนออกมาทำมุมกับจุดสมดุลเท่าใด ซึ่งในงานวิจัยนี้ได้กำหนดเป็นมุม  $\theta$  ส่วนแรงดึง  $f_1 = f_{ext1}$  มีทิศทำมุมกับแนวระดับเป็น  $\alpha$  จากภาพที่ 1 (a) พิจารณาการเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่ายระบบอยู่ในสภาวะสมดุล c [2,3]

$$f_{ext1} \cos(\alpha) \hat{i} - T \sin(\theta) \hat{i} = 0$$

$$f_{ext1} \cos(\alpha) = T \sin(\theta) \tag{1}$$

จากรูปที่ 1 (a) พิจารณาระบบอยู่ในสภาวะสมดุล  $\sum \vec{F}_y = 0$

$$T \cos(\theta) \hat{j} + f_{ext1} \sin(\alpha) \hat{j} = mg \hat{j}$$

$$f_{ext1} \sin(\alpha) = mg - T \cos(\theta) \tag{2}$$

นำสมการที่ (1) และ (2) ยกกำลังทั้งสองข้าง จะได้

$$f_{ext1}^2 \cos^2(\alpha) = T^2 \sin^2(\theta) \tag{3}$$

$$f_{ext1}^2 \sin^2(\alpha) = (mg)^2 - 2mgT \cos(\theta) + T^2 \cos^2(\theta) \tag{4}$$

นำสมการที่ (3) บวกกับ (4)

$$f_{ext1}^2 = (mg)^2 - 2mgT \cos(\theta) + T^2$$

$$\cos(\theta) = \frac{T^2 + (mg)^2 - f_{ext1}^2}{2mgT} \quad (5)$$

เมื่อพิจารณาจากภาพที่ 1 (a) หากต้องการคำนวณหาระยะ  $\eta_1$  ที่มีค่ามากที่สุด เราอาจสามารถหาได้จากค่าของมุม  $\theta$  ที่มีค่ามากที่สุดได้ ดังนั้นเราจึงหาค่าของขนาดแรงตึงในเส้นเชือก  $T$  ที่ทำให้มุมของ  $\theta$  มีค่าสูงสุด โดยการหาอนุพันธ์ของสมการที่ (5) เทียบกับแรงตึงในเส้นเชือก  $T$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dT}(\cos(\theta)) &= \frac{d}{dT} \left( \frac{T^2 + (mg)^2 - f_{ext1}^2}{2mgT} \right) \\ -\sin(\theta) \frac{d\theta}{dT} &= \frac{2mgT(2T) - ((T^2 + (mg)^2 - f_{ext1}^2)2mg)}{(2mgT)^2} \end{aligned} \quad (6)$$

จากเงื่อนไข  $d\theta/dT = 0$  [1] ทำให้งานวิจัยนี้ได้ค่าวิกฤติของมุม  $\theta$  แทนลงในสมการที่ (6) จะได้

$$T = \sqrt{(mg)^2 - f_{ext1}^2} \quad (7)$$

นำสมการที่ (7) แทนลงในสมการที่ (5) จะได้

$$\begin{aligned} \cos(\theta) &= \frac{\left(\sqrt{(mg)^2 - f_{ext1}^2}\right)^2 + (mg)^2 - f_{ext1}^2}{2mg\left(\sqrt{(mg)^2 - f_{ext1}^2}\right)} = \frac{(mg)^2 - f_{ext1}^2}{mg\left(\sqrt{(mg)^2 - f_{ext1}^2}\right)} \\ \cos(\theta) &= \frac{(mg)^2 - f_{ext1}^2}{mg\left(\sqrt{(mg)^2 - f_{ext1}^2}\right)} \end{aligned} \quad (8)$$

$$\theta = \cos^{-1} \left( \frac{(mg)^2 - f_{ext1}^2}{mg\left(\sqrt{(mg)^2 - f_{ext1}^2}\right)} \right) \quad (9)$$

หรือสามารถเขียน  $\cos(\theta)$  ในสมการที่ (8) ในรูปของ  $\sin(\theta)$  [4] ดังนี้

$$\begin{aligned} \sin(\theta) &= \sqrt{1 - \cos^2(\theta)} \\ \sin(\theta) &= \sqrt{1 - \left( \frac{(mg)^2 - f_{ext1}^2}{mg\left(\sqrt{(mg)^2 - f_{ext1}^2}\right)} \right)^2} \end{aligned}$$

ระยะห่างระหว่างลูกตุ้มนาฬิกามวล  $m$  กับแนวตั้งเป็น  $\eta_1 = \ell \sin(\theta)$  จะได้

$$\eta_1 = \ell \left[ 1 - \left( \frac{(mg)^2 - f_{ext1}^2}{mg \left( \sqrt{(mg)^2 - f_{ext1}^2} \right)} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (10)$$

จากสมการที่ (10) เป็นระยะห่างระหว่างลูกตุ้มนาฬิกามวล  $m$  กับจุดสมดุคที่ทำการดึงด้วยแรงดึง  $f_1 = f_{ext1}$  ซึ่งในงานวิจัยนี้ได้แสดงความสัมพันธ์ระหว่างระยะห่างระหว่างลูกตุ้มนาฬิกามวล  $m$  กับจุดสมดุค กับแรงดึง  $f_{ext1}$  ดังภาพที่ 2 (a) และภาพที่ 2 (b) [8,9,10] ต่อมาพิจารณาการเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่ายจากภาพที่ 1 (b) พิจารณาระบบอยู่ในภาวะสมดุค  $\sum F_x = 0$

$$\begin{aligned} f_{ext2} t \cos(\alpha) \hat{i} - T \sin(\theta) \hat{i} &= 0 \\ f_{ext2} t \cos(\alpha) &= T \sin(\theta) \end{aligned} \quad (11)$$

จากภาพที่ 1 (b) พิจารณาระบบอยู่ในภาวะสมดุค  $\sum F_y = 0$

$$\begin{aligned} T \cos(\theta) \hat{j} + f_{ext2} t \sin(\alpha) \hat{j} &= mg \hat{j} \\ f_{ext2} t \sin(\alpha) &= mg - T \cos(\theta) \end{aligned} \quad (12)$$

นำสมการที่ (11) และสมการที่ (12) ยกกำลังทั้งสองข้าง จะได้

$$f_{ext2}^2 t^2 \cos^2(\alpha) = T^2 \sin^2(\theta) \quad (13)$$

$$f_{ext2}^2 t^2 \sin^2(\alpha) = (mg - T \cos(\theta))^2$$

$$f_{ext2}^2 t^2 \sin^2(\alpha) = (mg)^2 - 2mgT \cos(\theta) + T^2 \cos^2(\theta) \quad (14)$$

นำสมการที่ (13) บวกกับสมการที่ (14) จะได้

$$\cos(\theta) = \frac{T^2 + (mg)^2 - f_{ext2}^2 t^2}{2mgT} \quad (15)$$

เมื่อพิจารณาจากภาพที่ 1 (b) หากต้องการคำนวณหาระยะ  $\eta_2$  ที่มีค่ามากที่สุดและเป็นฟังก์ชันของเวลาเนื่องจากแรงภายนอก  $f_2 = f_{ext2} t$  เราอาจสามารถหาได้จากค่าของมุม  $\theta$  ที่มีค่ามากที่สุดได้ ดังนั้นเราจึงหาค่าของขนาดแรงดึงในเส้นเชือก  $T$  ที่ทำให้มุมของ  $\theta$  มีค่าสูงสุด โดยการหาอนุพันธ์ของสมการที่ (15) เทียบกับแรงดึงในเส้นเชือก  $T$  และแทน  $d\theta/dT = 0$  จะทำให้นักวิจัยนี้ได้ค่าวิกฤติของมุม  $\theta$  จะได้แรงดึงในเส้นเชือก

$$T = \sqrt{(mg)^2 - f_{ext2}^2 t^2} \quad (16)$$

นำสมการที่ (16) แทนลงในสมการที่ (15) จะได้

$$\cos(\theta) = \frac{(mg)^2 - f_{ext}^2 t^2}{mg \left( \sqrt{(mg)^2 - f_{ext}^2 t^2} \right)} \quad (17)$$

หรือสามารถเขียน  $\cos(\theta)$  ในสมการที่ (17) ในภาพของ  $\sin(\theta)$  ดังนี้

$$\sin(\theta) = \sqrt{1 - \cos^2(\theta)}$$

$$\sin(\theta) = \sqrt{1 - \left( \frac{(mg)^2 - f_{ext}^2 t^2}{mg \left( \sqrt{(mg)^2 - f_{ext}^2 t^2} \right)} \right)^2}$$

ระยะห่างของการดึงลูกตุ้มนาฬิกา  $\eta_2 = \ell \sin(\theta)$  จะได้

$$\eta_2 = \ell \left( 1 - \left( \frac{(mg)^2 - f_{ext}^2 t^2}{mg \left( \sqrt{(mg)^2 - f_{ext}^2 t^2} \right)} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (18)$$

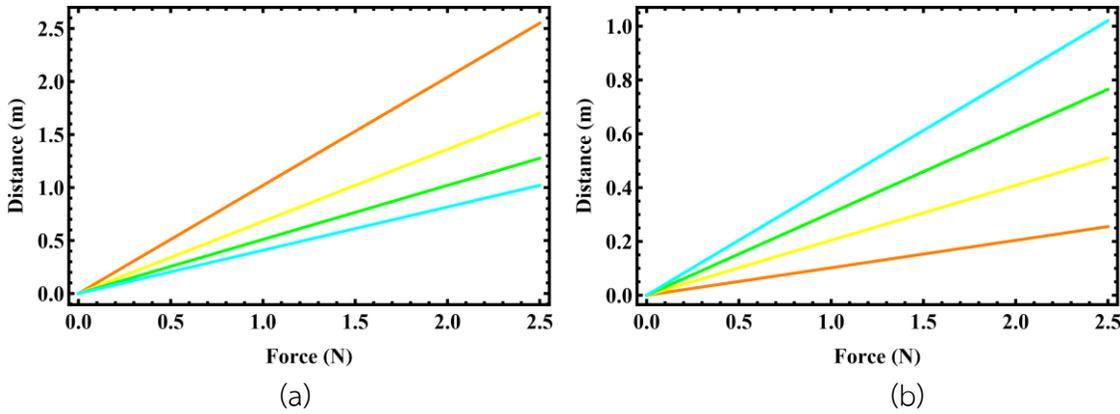
จากสมการที่ (18) เป็นระยะห่างระหว่างลูกตุ้มนาฬิกามวล  $m$  กับจุดสมดุคที่ทำการดึงด้วยแรงดึง  $f_2 = f_{ext} t$  ซึ่งในงานวิจัยนี้ได้แสดงความสัมพันธ์ระหว่างระยะห่างระหว่างลูกตุ้มนาฬิกามวล  $m$  กับจุดสมดุค กับแรงดึง  $f_2 = f_{ext} t$  ดังภาพที่ 3 (a) และภาพที่ 3 (b)

**ตารางที่ 1** แสดงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรต้น ตัวแปรควบคุม และตัวแปรตามคือ ระยะห่าง  $\eta_1$

ตัวแปรต้น	ตัวแปรควบคุม	ตัวแปรตาม ระยะห่างระหว่างลูกตุ้มนาฬิกา
มวล $m_1 = 0.10 \text{ kg}$		$\eta_{11}$ เส้นกราฟสีน้ำตาล
มวล $m_2 = 0.15 \text{ kg}$	$\ell = 1 \text{ m.}$	$\eta_{12}$ เส้นกราฟสีเหลือง
มวล $m_3 = 0.20 \text{ kg}$	$g = 9.8 \text{ m/s}^2$	$\eta_{13}$ เส้นกราฟสีเขียว
มวล $m_4 = 0.25 \text{ kg}$		$\eta_{14}$ เส้นกราฟสีฟ้าน้ำทะเล
ความยาว $\ell_1 = 0.20 \text{ m}$	$m = 0.20 \text{ kg.}$	$\eta_{11}$ เส้นกราฟสีน้ำตาล
ความยาว $\ell_2 = 0.40 \text{ m}$	$g = 9.8 \text{ m/s}^2$	$\eta_{12}$ เส้นกราฟสีเหลือง
ความยาว $\ell_3 = 0.60 \text{ m}$		$\eta_{13}$ เส้นกราฟสีเขียว
ความยาว $\ell_4 = 0.80 \text{ m}$		$\eta_{14}$ เส้นกราฟสีฟ้าน้ำทะเล

ผลการวิจัยและอภิปรายผลการวิจัย

แสดงผลการวิจัยที่ได้จากกระบวนการวิจัยและอภิปรายผลการวิจัยที่ได้มาจากการวิจัย

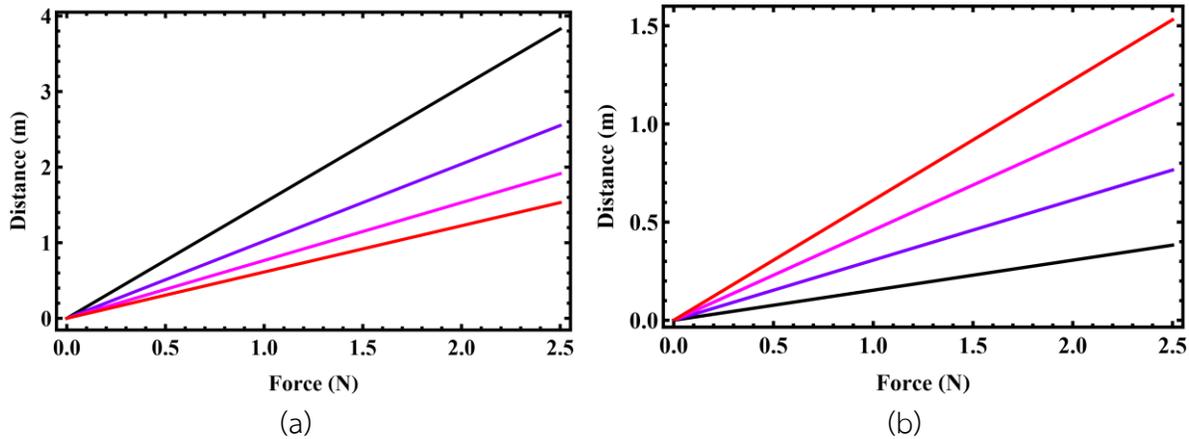


ภาพที่ 2 (a) ความสัมพันธ์ระหว่างระยะห่างระหว่างลูกตุ้มนาฬิกามวล  $m$  กับจุดสมดุล กับแรงดึง  $f_{ext1}$  ในกรณีที่ขนาดของมวลลูกตุ้มนาฬิกาเปลี่ยน  $m = 0.10\text{ kg} \rightarrow 0.25\text{ kg}$  (b) แสดงความสัมพันธ์ระหว่างระยะห่างระหว่างลูกตุ้มนาฬิกามวล  $m$  กับจุดสมดุล กับแรงดึง  $f_{ext1}$  ในกรณีที่ขนาดของความยาวเส้นเชือกเปลี่ยน  $l = 0.20\text{ m} \rightarrow 0.80\text{ m}$

จากภาพที่ 2 (a) ถ้าขนาดมวลลูกตุ้มนาฬิกามีค่าเพิ่มขึ้นจาก  $m = 0.10\text{ kg} \rightarrow 0.25\text{ kg}$  จะทำให้ระยะห่างระหว่างลูกตุ้มนาฬิกามวล  $m$  กับจุดสมดุล กับแรงดึง  $f_{ext1}$  คือ  $\eta_1$  มีระยะห่างที่ต้องดึงลูกตุ้มนาฬิกาออกจากแนวตั้งเปลี่ยนจาก 2.5 เมตร ตามเส้นกราฟสีน้ำตาล ลดลงเป็น 0.8 เมตรเป็นกราฟเส้นสีเขียวน้ำตาล ณ แรงดึง 2.5 นิวตัน จากภาพที่ 2 (b) ถ้าขนาดความยาวเส้นเชือกมีค่าเพิ่มขึ้นจาก  $l = 0.20\text{ m} \rightarrow 0.80\text{ m}$  จะทำให้ระยะห่างระหว่างลูกตุ้มนาฬิกามวล  $m$  กับแนวตั้ง กับแรงดึง  $f_{ext1}$  คือ  $\eta_1$  มีระยะห่างที่ต้องดึงลูกตุ้มนาฬิกาออกจากแนวตั้งเปลี่ยนจาก 0.22 เมตร เพิ่มขึ้นเป็น 1.2 เมตร ณ แรงดึง 2.5 นิวตัน

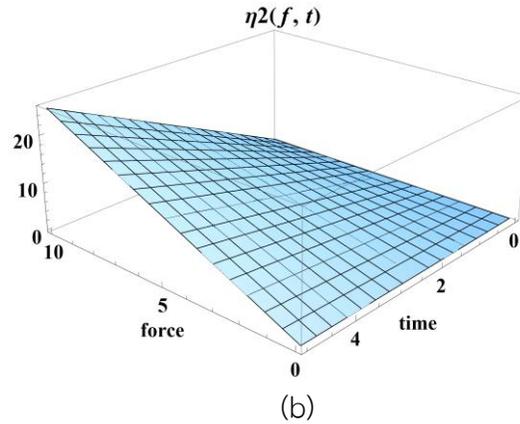
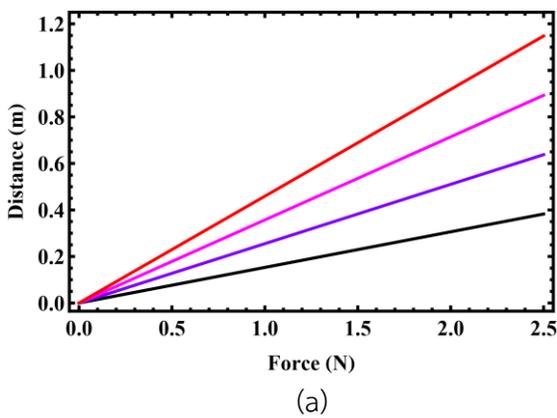
ตารางที่ 2 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรต้น ตัวแปรควบคุม และตัวแปรตามคือ ระยะห่าง  $\eta_2$

ตัวแปรต้น	ตัวแปรควบคุม	ตัวแปรตาม ระยะห่างระหว่างลูกตุ้มนาฬิกา
มวล $m_1 = 0.10\text{ kg}$	$l = 1\text{ m.}$ $g = 9.8\text{ m/s}^2$	$\eta_{21}$ เส้นกราฟสีดำ
มวล $m_2 = 0.15\text{ kg}$		$\eta_{22}$ เส้นกราฟสีม่วง
มวล $m_3 = 0.20\text{ kg}$		$\eta_{23}$ เส้นกราฟสีชมพู
มวล $m_4 = 0.25\text{ kg}$		$\eta_{24}$ เส้นกราฟสีแดง
ความยาว $l_1 = 0.20\text{ m}$	$m = 0.20\text{ kg.}$ $g = 9.8\text{ m/s}^2$	$\eta_{21}$ เส้นกราฟสีดำ
ความยาว $l_2 = 0.40\text{ m}$		$\eta_{22}$ เส้นกราฟสีม่วง
ความยาว $l_3 = 0.60\text{ m}$		$\eta_{23}$ เส้นกราฟสีชมพู
ความยาว $l_4 = 0.80\text{ m}$		$\eta_{24}$ เส้นกราฟสีแดง



ภาพที่ 3 (a) ความสัมพันธ์ระหว่างระยะห่างระหว่างลูกตุ้มนาฬิกามวล  $m$  กับจุดสมดุล กับแรงดึง  $f_{ext2} t$  ในกรณี ที่ขนาดของมวลลูกตุ้มนาฬิกาเปลี่ยน  $m = 0.10\text{ kg} \rightarrow 0.25\text{ kg}$  (b) แสดงความสัมพันธ์ระหว่างระยะห่างระหว่าง ลูกตุ้มนาฬิกามวล  $m$  กับจุดสมดุล กับแรงดึง  $f_{ext2} t$  ในกรณีที่ขนาดของความยาวเส้นเชือกลูกตุ้มเปลี่ยนค่าตามนี้  $l = 0.20\text{ m} \rightarrow 0.80\text{ m}$

จากภาพที่ 3 (a) ถ้าขนาดมวลลูกตุ้มนาฬิกามีค่าเพิ่มขึ้นจาก  $m = 0.10\text{ kg} \rightarrow 0.25\text{ kg}$  จะทำให้ ระยะห่างระหว่างลูกตุ้มนาฬิกามวล  $m$  กับจุดสมดุล กับแรงดึง  $f_{ext2} t$  คือ  $\eta_2$  มีระยะห่างที่ต้องดึงลูกตุ้มนาฬิกา ออกจากตำแหน่งจุดสมดุลเปลี่ยนจาก 3.8 เมตร ลดลงเป็น 1.4 เมตร ณ แรงดึง 2.5 นิวตัน จากภาพที่ 3 (b) ถ้า ขนาดความยาวเส้นเชือกมีค่าเพิ่มขึ้นจาก  $l = 0.20\text{ m} \rightarrow 0.80\text{ m}$  จะทำให้ระยะห่างระหว่างลูกตุ้มนาฬิกามวล  $m$  กับจุดสมดุล กับแรงดึง  $f_{ext2} t$  คือ  $\eta_2$  มีระยะห่างที่ต้องดึงลูกตุ้มนาฬิกาออกจากแนวตั้งเปลี่ยนจาก 0.4 เมตร เพิ่มขึ้นเป็น 1.5 เมตร ณ แรงดึง 2.5 นิวตัน จากภาพที่ 2 (a) และภาพที่ 3 (a) ทำการเปรียบเทียบระยะห่าง ระหว่างลูกตุ้มนาฬิกามวล  $m$  กับแนวตั้ง ทั้งสองกรณี แรงดึง  $f_{ext1}$  และแรงดึง  $f_{ext2} t$  ระยะห่าง  $\eta_1$  และ ระยะห่าง  $\eta_2$  ตามลำดับ จะเห็นได้ว่าระยะห่าง  $\eta_2$  มีค่ามากกว่า  $\eta_1$  เป็น 2 เท่า สอดคล้องกับแรงดึงที่เพิ่มขึ้นเป็น สองเท่า



ภาพที่ 4 (a) ความสัมพันธ์ระหว่างระยะห่างระหว่างลูกตุ้มนาฬิกามวล  $m$  กับจุดสมดุลกับแรงดึง  $f_2 = f_{ext2} t$  ในกรณีที่ขนาดค่าของเวลาที่เพิ่มขึ้น  $t=0.30 s \rightarrow 0.90 s$  (b) แสดงความสัมพันธ์ระหว่างระยะห่างระหว่างลูกตุ้มนาฬิกามวล  $m$  กับจุดสมดุล กับแรงดึง  $f_2 = f_{ext2} t$  ในกรณี 3 มิติ

จากภาพที่ 4(a) เป็นกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรความยาวเส้นเชือก น้ำหนักของวัตถุ ขนาดของแรงดึงภายนอก  $f_2 = f_{ext2} t$  เมื่อขนาดของเวลาเพิ่มขึ้น  $t=0.30 s \rightarrow 0.90 s$  ซึ่งเส้นกราฟสีดำแสดงขนาดของระยะห่างระหว่างลูกตุ้มนาฬิกามวล  $m$  กับจุดสมดุล เมื่อเวลาที่มีค่าเท่ากับ  $0.3s$  ต่อมาเส้นกราฟสีม่วงแสดงขนาดของระยะห่างระหว่างลูกตุ้มนาฬิกามวล  $m$  กับจุดสมดุล เมื่อเวลาที่มีค่าเท่ากับ  $0.5s$  ต่อมาเส้นกราฟสีชมพูแสดงขนาดของระยะห่างระหว่างลูกตุ้มนาฬิกามวล  $m$  กับจุดสมดุล เมื่อเวลาที่มีค่าเท่ากับ  $0.7s$  และเส้นกราฟสีแดงแสดงขนาดของระยะห่างระหว่างลูกตุ้มนาฬิกามวล  $m$  กับจุดสมดุล เมื่อเวลาที่มีค่าเท่ากับ  $0.9s$  ถ้าขนาดของเวลาเพิ่มขึ้นส่งผลให้ขนาดของระยะห่างระหว่างลูกตุ้มนาฬิกามวล  $m$  กับจุดสมดุลเพิ่มขึ้นด้วย จากภาพที่ 4(b) เป็นกราฟ 3 มิติ ความสัมพันธ์ระหว่างระยะห่างระหว่างลูกตุ้มนาฬิกามวล  $m$  กับจุดสมดุล กับแรงดึง  $f_2 = f_{ext2} t$  และเวลา ซึ่งขนาดของระยะห่างระหว่างลูกตุ้มนาฬิกามวล กับจุดสมดุลมีลักษณะเป็นคลื่นระนาบ

### สรุปผลการวิจัย

จากสมการที่ (10) คือ ระยะห่างระหว่างลูกตุ้มนาฬิกามวล  $m$  กับจุดสมดุล กับแรงดึง  $f_{ext1}$  เป็นระยะห่าง  $\eta_1$  จากสมการที่ (18) คือ ระยะห่างระหว่างลูกตุ้มนาฬิกามวล  $m$  กับจุดสมดุล กับแรงดึง  $f_{ext2} t$  เป็นระยะห่าง  $\eta_2$  ตามลำดับ ซึ่งค่าระยะห่าง  $\eta_1$  และระยะ  $\eta_2$  แปรผันโดยตรงกับความยาวเส้นเชือก แต่ค่าระยะห่าง  $\eta_1$  และระยะ  $\eta_2$  แปรผกผันกับขนาดของมวลลูกตุ้มนาฬิกา

### กิตติกรรมประกาศ

ขอขอบพระคุณสาขาวิชาวิทยาศาสตร์ศึกษา คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเพชรบูรณ์ ที่ให้การสนับสนุนด้านสถานที่ และเวลาในการทำงานวิจัย จนกระทั่งงานสำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี

## เอกสารอ้างอิง

- [1] Riley, K.F., and Hobson, M.P. (2006). *Mathematical Methods for Physics and Engineering*. (3<sup>th</sup> ed.). New York: Cambridge University Press.
- [2] Atamp A.,(1990), *Introduction to classical mechanics*, Prentice-Hall, United States America, pp.336-340
- [3] Goldstein P.S.,(2002), *Classical Mechanics*, (3<sup>th</sup> ed.), Prentice-Hall, United States America. pp. 265-271
- [4] Murray R.S. and John L. (1999), *Mathematical Handbook of Formulas and Tables*, (2<sup>rd</sup> ed.),Mcgraw-hill New York. pp. 46-97
- [5] Coulton P., and Foote R. (2009), *The dynamics of pendulums on surfaces of constant Curvature*, *Math. Phys. Anal. Geom.* 12, 97–107.
- [6] Duc L. D.,(2023), *Experimental evaluation of damping models for a nonlinear pendulum system*, **Phys. Educ.** 58, 055003
- [7] Kyung-Ryul L. and Young-Gu J.,(2021), *Learning the Resistance Coefficients of Pendulum Motion Using Balls of Various Sizes*, **New Physics: Sae Mulli**, Vol. 71, No. 12,, pp. 1067-1075
- [8] K. Narissarawut, K. Suwannapoch, S. Naknayom, T. Seehatrai, and A. Hutem, (2024), *Creation of experimental equipment finding the coefficient of friction in sand floor and flake stone floor from the solid sphere and hollow sphere*, *Journal of Earth Science, Astronomy and Space*, Vol. 7 No. 1, pp. 1-12.
- [9] A. Wanaek and A. Hutem, (2023), *Calculation of Time-dependent Angular Displacement Angular Velocity and Tension Force of Particle in the Pendulum Motion under Air Resistance Force and Cosine External Force*, *Journal of Earth Science, Astronomy and Space*, Vol. 6 No. 1, pp 14-28.
- [10] A. Hutem,(2023) , *Calculation of the time-dependent velocity and displacement of particle move under time-dependent external force of damping oscillation*, *Journal of Science and Technology CRRU*, vol. 2, no. 1, pp. 1-7.
- [11] Hutem A., (2024), *Angular Displacement Angular Velocity and Tension Force of Particle in the Pendulum Motion under drag Force and Time-Dependent External Force*, *Journal of Science and Technology CRRU*, Vol. 3 No. 1., pp. 48-65
- [12] Kuaykaew S., Kerdmee S., Banyenugam P., Moonsri P. and Hutem A.,(2016), *The Analytical Description of Projectile Motion of Cricket Ball in a Linear Resisting Medium the Storm Force*, *Applied Mechanics and Materials*, vol. 855, pp. 188-191.