

สมการไดโอแฟนไทน์ $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{4}{z} = \frac{1}{2}$

On The Diophantine Equation $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{4}{z} = \frac{1}{2}$

สุธน ตาดิ*

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเทพสตรี

Suton Tadee*

Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Thepsatri Rajabhat University

บทคัดย่อ

ในงานวิจัยนี้ได้ศึกษาการหาผลเฉลยจำนวนเต็มบวกทั้งหมดของสมการไดโอแฟนไทน์ $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{4}{z} =$

$\frac{1}{2}$ เมื่อ x, y และ z เป็นจำนวนเต็มบวก

คำสำคัญ : สมการไดโอแฟนไทน์, ผลเฉลยจำนวนเต็มบวก, อสมการ

Abstract

In this research, we find all positive integer solutions of the Diophantine equation $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{4}{z} = \frac{1}{2}$, where x, y and z are positive integers.

Keywords: Diophantine equation, Positive integer solution, Inequality

ที่มาและความสำคัญ

ในปี ค.ศ. 2013 Sándor [1] ได้ศึกษาและค้นพบผลเฉลยจำนวนเต็มบวกทั้งหมดของสมการไดโอแฟนไทน์ $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2}$ ต่อมาในปี ค.ศ. 2019 Pakongpun [2] ได้ศึกษาและค้นพบผลเฉลยจำนวนเต็มบวกทั้งหมดของสมการไดโอแฟนไทน์ $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z} = \frac{1}{2}$ หลังจากนั้นในปี ค.ศ. 2021 Zhao et al. [3] ได้แสดง

*Corresponding author: suton.t@lawasri.tru.ac.th

Received : 18/11/2024 Revised : 24/04/2025 Accepted : 23/06/2025

เงื่อนไขการมีผลเฉลยจำนวนเต็มบวกของสมการไดโอแฟนไทน์ $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{a}{p}$ เมื่อ a เป็นจำนวนเต็มบวก และ p เป็นจำนวนเฉพาะ ในขณะเดียวกัน Sándor and Atanassov [4] ได้ศึกษาผลเฉลยจำนวนเต็มบวกทั้งหมดของสมการไดโอแฟนไทน์ $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{u}{u+1}$ เมื่อ u เป็นจำนวนเต็มบวก

ต่อมาในปี 2022 Atri [5] ได้หาผลเฉลยจำนวนเต็มบวกทั้งหมดของสมการไดโอแฟนไทน์ $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{4}$ ในปีเดียวกัน Chinram et al. [6] ได้พบว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z} = \frac{1}{3}$ มีผลเฉลยจำนวนเต็มบวกทั้งหมด จำนวน 236 ผลเฉลยและ Srimud et al. [7] ได้ค้นพบผลเฉลยจำนวนเต็มบวกทั้งหมดของสมการไดโอแฟนไทน์ $\frac{2}{x} + \frac{3}{y} + \frac{4}{z} = \frac{1}{2}$ และในปี ค.ศ. 2023 Tadee and Poopra [8] ได้ค้นพบผลเฉลยจำนวนเต็มบวกทั้งหมดของสมการไดโอแฟนไทน์ $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{3}$ ในปี ค.ศ. 2023 Taher [9] ได้ค้นพบผลเฉลยจำนวนเต็มบวกทั้งหมดของสมการไดโอแฟนไทน์ $\frac{1}{x} + \frac{3}{y} + \frac{5}{z} = \frac{3}{4}$ และเมื่อไม่นานมานี้ ในปี ค.ศ. 2024 Sudsanguan, P. and Sudsanguan, W. [10] ได้ค้นพบผลเฉลยจำนวนเต็มบวกทั้งหมดของสมการไดโอแฟนไทน์ $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{4}{z} = \frac{1}{4}$

จากการศึกษางานวิจัยดังกล่าวข้างต้นทำให้ผู้วิจัยสนใจศึกษาผลเฉลยจำนวนเต็มบวกของสมการไดโอแฟนไทน์

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{4}{z} = \frac{1}{2} \quad (1)$$

เมื่อ x, y และ z เป็นจำนวนเต็มบวก

วิธีการดำเนินการวิจัย

ให้ x, y, z เป็นจำนวนเต็มบวกและเป็นผลเฉลยของสมการ (1) จะได้ว่า

$$\frac{1}{x} < \frac{1}{2}, \frac{2}{y} < \frac{1}{2} \text{ และ } \frac{4}{z} < \frac{1}{2}$$

ดังนั้น $x \geq 3, y \geq 5$ และ $z \geq 9$ ตามลำดับ

ในงานวิจัยนี้จะแยกพิจารณาเป็น 3 กรณี ดังนี้

1. $x \leq y \leq z$ หรือ $x \leq z < y$
2. $y < x \leq z$ หรือ $y \leq z < x$

สมการไดโอแฟนไทน์ $1/x+2/y+4/z=1/2$

3. $z < x \leq y$ หรือ $z < y < x$

ในลำดับต่อไปจะหาผลเฉลยของแต่ละกรณี

กรณีที่ 1: $x \leq y \leq z$ หรือ $x \leq z < y$ ดังนั้นจากสมการ (1) จะได้ว่า $\frac{7}{x} \geq \frac{1}{2}$ นั่นคือ $x \leq 14$ และจาก $3 \leq x$ เพราะฉะนั้นสามารถแยกพิจารณาจำนวนเต็มบวก x โดยที่ $3 \leq x \leq 14$ ได้ดังนี้

กรณีที่ 1.1 $x = 3$ ดังนั้นจากสมการ (1) จะได้ว่า

$$\frac{2}{y} + \frac{4}{z} = \frac{1}{6} \quad (2)$$

ถ้า $x \leq y \leq z$ และจากสมการ (2) จะได้ว่า $3 \leq y \leq 36$ และเมื่อแทนค่า y ในสมการ (2) แล้วพิจารณาค่า z ที่เป็นจำนวนเต็มบวก ทำให้ได้ผลเฉลย (x, y, z) ดังต่อไปนี้ $(3, 13, 312)$, $(3, 14, 168)$, $(3, 15, 120)$, $(3, 16, 96)$, $(3, 18, 72)$, $(3, 20, 60)$, $(3, 21, 56)$, $(3, 24, 48)$, $(3, 28, 42)$, $(3, 30, 40)$ และ $(3, 36, 36)$

ถ้า $x \leq z < y$ และจากสมการ (2) จะได้ว่า $3 \leq z \leq 35$ และเมื่อแทนค่า z ในสมการ (2) แล้วพิจารณาค่า y ที่เป็นจำนวนเต็มบวก ทำให้ได้ผลเฉลย (x, y, z) ดังต่อไปนี้ $(3, 300, 25)$, $(3, 156, 26)$, $(3, 108, 27)$, $(3, 84, 28)$, $(3, 60, 30)$, $(3, 48, 32)$ และ $(3, 44, 33)$

กรณีที่ 1.2 $x = 4$ ดังนั้นจากสมการ (1) จะได้ว่า

$$\frac{2}{y} + \frac{4}{z} = \frac{1}{4} \quad (3)$$

ถ้า $x \leq y \leq z$ และจากสมการ (3) จะได้ว่า $4 \leq y \leq 24$ และเมื่อแทนค่า y ในสมการ (3) แล้วพิจารณาค่า z ที่เป็นจำนวนเต็มบวก ทำให้ได้ผลเฉลย (x, y, z) ดังต่อไปนี้ $(4, 9, 144)$, $(4, 10, 80)$, $(4, 12, 48)$, $(4, 16, 32)$ และ $(4, 24, 24)$

ถ้า $x \leq z < y$ และจากสมการ (3) จะได้ว่า $4 \leq z \leq 23$ และเมื่อแทนค่า z ในสมการ (3) แล้วพิจารณาค่า y ที่เป็นจำนวนเต็มบวก ทำให้ได้ผลเฉลย (x, y, z) ดังต่อไปนี้ $(4, 136, 17)$, $(4, 72, 18)$ และ $(4, 40, 20)$

กรณีที่ 1.3 $x = 5$ ดังนั้นจากสมการ (1) จะได้ว่า

$$\frac{2}{y} + \frac{4}{z} = \frac{3}{10} \quad (4)$$

ถ้า $x \leq y \leq z$ และจากสมการ (4) จะได้ว่า $5 \leq y \leq 20$ และเมื่อแทนค่า y ในสมการ (4) แล้วพิจารณาค่า z ที่เป็นจำนวนเต็มบวก ทำให้ได้ผลเฉลย (x, y, z) ดังต่อไปนี้ $(5, 7, 280)$, $(5, 8, 80)$, $(5, 10, 40)$, $(5, 12, 30)$, $(5, 15, 24)$ และ $(5, 20, 20)$

ถ้า $x \leq z < y$ และจากสมการ (4) จะได้ว่า $5 \leq z \leq 19$ และเมื่อแทนค่า z ในสมการ (4) แล้วพิจารณาค่า y ที่เป็นจำนวนเต็มบวก ทำให้ได้ผลเฉลย (x, y, z) ดังต่อไปนี้ $(5, 140, 14)$, $(5, 60, 15)$ และ $(5, 40, 16)$

กรณีที่ 1.4 $x = 6$ ดังนั้นจากสมการ (1) จะได้ว่า

$$\frac{2}{y} + \frac{4}{z} = \frac{1}{3} \quad (5)$$

ถ้า $x \leq y \leq z$ และจากสมการ (5) จะได้ว่า $6 \leq y \leq 18$ และเมื่อแทนค่า y ในสมการ (5) แล้วพิจารณาค่า z ที่เป็นจำนวนเต็มบวก ทำให้ได้ผลเฉลย (x, y, z) ดังต่อไปนี้ $(6, 7, 84)$, $(6, 8, 48)$, $(6, 9, 36)$, $(6, 10, 30)$, $(6, 12, 24)$, $(6, 14, 21)$, $(6, 15, 20)$ และ $(6, 18, 18)$

ถ้า $x \leq z < y$ และจากสมการ (5) จะได้ว่า $6 \leq z \leq 17$ และเมื่อแทนค่า z ในสมการ (5) แล้วพิจารณาค่า y ที่เป็นจำนวนเต็มบวก ทำให้ได้ผลเฉลย (x, y, z) ดังต่อไปนี้ $(6, 78, 13)$, $(6, 42, 14)$, $(6, 30, 15)$ และ $(6, 24, 16)$

กรณีที่ 1.5 $x = 7$ ดังนั้นจากสมการ (1) จะได้ว่า

$$\frac{2}{y} + \frac{4}{z} = \frac{5}{14} \quad (6)$$

ถ้า $x \leq y \leq z$ และจากสมการ (6) จะได้ว่า $7 \leq y \leq 16$ และเมื่อแทนค่า y ในสมการ (6) แล้วพิจารณาค่า z ที่เป็นจำนวนเต็มบวก ทำให้ได้ผลเฉลย (x, y, z) ดังต่อไปนี้ $(7, 7, 56)$ และ $(7, 12, 21)$

ถ้า $x \leq z < y$ และจากสมการ (6) จะได้ว่า $7 \leq z \leq 16$ และเมื่อแทนค่า z ในสมการ (6) แล้วพิจารณาค่า y ที่เป็นจำนวนเต็มบวก ทำให้ได้ผลเฉลย (x, y, z) ดังต่อไปนี้ $(7, 84, 12)$ และ $(7, 28, 14)$

กรณีที่ 1.6 $x = 8$ ดังนั้นจากสมการ (1) จะได้ว่า

$$\frac{2}{y} + \frac{4}{z} = \frac{3}{8} \quad (7)$$

ถ้า $x \leq y \leq z$ และจากสมการ (7) จะได้ว่า $8 \leq y \leq 16$ และเมื่อแทนค่า y ในสมการ (7) แล้วพิจารณาค่า z ที่เป็นจำนวนเต็มบวก ทำให้ได้ผลเฉลย (x, y, z) ดังต่อไปนี้ $(8, 8, 32)$ และ $(8, 16, 16)$

ถ้า $x \leq z < y$ และจากสมการ (7) จะได้ว่า $8 \leq z \leq 15$ และเมื่อแทนค่า z ในสมการ (7) แล้วพิจารณาค่า y ที่เป็นจำนวนเต็มบวก ทำให้ได้ผลเฉลย (x, y, z) ดังต่อไปนี้ $(8, 176, 11)$ และ $(8, 48, 12)$

กรณีที่ 1.7 $x = 9$ ดังนั้นจากสมการ (1) จะได้ว่า

$$\frac{2}{y} + \frac{4}{z} = \frac{7}{18} \quad (8)$$

ถ้า $x \leq y \leq z$ และจากสมการ (8) จะได้ว่า $9 \leq y \leq 15$ และเมื่อแทนค่า y ในสมการ (8) แล้วพิจารณาค่า z ที่เป็นจำนวนเต็มบวก ทำให้ได้ผลเฉลย (x, y, z) ดังต่อไปนี้ $(9, 9, 24)$ และ $(9, 12, 18)$

ถ้า $x \leq z < y$ และจากสมการ (8) จะได้ว่า $9 \leq z \leq 15$ และเมื่อแทนค่า z ในสมการ (8) แล้วพิจารณาค่า y ที่เป็นจำนวนเต็มบวก ทำให้ได้ผลเฉลย $(x, y, z) = (9, 36, 12)$

กรณีที่ 1.8 $x = 10$ ดังนั้นจากสมการ (1) จะได้ว่า

$$\frac{2}{y} + \frac{4}{z} = \frac{2}{5} \quad (9)$$

ถ้า $x \leq y \leq z$ และจากสมการ (9) จะได้ว่า $10 \leq y \leq 15$ และเมื่อแทนค่า y ในสมการ (9) แล้วพิจารณาค่า z ที่เป็นจำนวนเต็มบวก ทำให้ได้ผลเฉลย (x, y, z) ดังต่อไปนี้ $(10, 10, 20)$ และ $(10, 15, 15)$

ถ้า $x \leq z < y$ และจากสมการ (9) จะได้ว่า $10 \leq z \leq 14$ และเมื่อแทนค่า z ในสมการ (9) แล้วพิจารณาค่า y ที่เป็นจำนวนเต็มบวก ทำให้ได้ผลเฉลย (x, y, z) ดังต่อไปนี้ $(10, 55, 11)$ และ $(10, 30, 12)$

กรณีที่ 1.9 $x = 11$ ดังนั้นจากสมการ (1) จะได้ว่า

$$\frac{2}{y} + \frac{4}{z} = \frac{9}{22} \quad (10)$$

ถ้า $x \leq y \leq z$ และจากสมการ (10) จะได้ว่า $11 \leq y \leq 14$ และเมื่อแทนค่า y ในสมการ (10) จะได้ว่า ไม่มีค่า z ที่เป็นจำนวนเต็มบวก ดังนั้น จึงไม่มีผลเฉลย

ถ้า $x \leq z < y$ และจากสมการ (10) จะได้ว่า $11 \leq z \leq 14$ และเมื่อแทนค่า z ในสมการ (10) แล้วพิจารณาค่า y ที่เป็นจำนวนเต็มบวก ทำให้ได้ผลเฉลย $(x, y, z) = (11, 44, 11)$

กรณีที่ 1.10 $x = 12$ ดังนั้นจากสมการ (1) จะได้ว่า

$$\frac{2}{y} + \frac{4}{z} = \frac{5}{12} \quad (11)$$

ถ้า $x \leq y \leq z$ และจากสมการ (11) จะได้ว่า $12 \leq y \leq 14$ และเมื่อแทนค่า y ในสมการ (11) แล้วพิจารณาค่า z ที่เป็นจำนวนเต็มบวก ทำให้ได้ผลเฉลย $(x, y, z) = (12, 12, 16)$

ถ้า $x \leq z < y$ และจากสมการ (11) จะได้ว่า $12 \leq z \leq 14$ และเมื่อแทนค่า z ในสมการ (11) แล้วพิจารณาค่า y ที่เป็นจำนวนเต็มบวก ทำให้ได้ผลเฉลย $(x, y, z) = (12, 24, 12)$

กรณีที่ 1.11 $x = 13$ ดังนั้นจากสมการ (1) จะได้ว่า

$$\frac{2}{y} + \frac{4}{z} = \frac{11}{26} \quad (12)$$

ถ้า $x \leq y \leq z$ และจากสมการ (12) จะได้ว่า $13 \leq y \leq 14$ และเมื่อแทนค่า y ในสมการ (12) จะได้ว่า ไม่มีค่า z ที่เป็นจำนวนเต็มบวก ดังนั้น จึงไม่มีผลเฉลย

ถ้า $x \leq z < y$ และจากสมการ (12) จะได้ว่า $13 \leq z \leq 14$ และเมื่อแทนค่า z ในสมการ (12) จะได้ว่า ไม่มีค่า y ที่เป็นจำนวนเต็มบวก ดังนั้น จึงไม่มีผลเฉลย

กรณีที่ 1.12 $x = 14$ ดังนั้นจากสมการ (1) จะได้ว่า

$$\frac{2}{y} + \frac{4}{z} = \frac{3}{7} \quad (13)$$

ถ้า $x \leq y \leq z$ และจากสมการ (13) จะได้ว่า $y = 14$ และเมื่อแทนค่า y ในสมการ (13) แล้ว ทำให้ได้ผลเฉลย $(x, y, z) = (14, 14, 14)$

ถ้า $x \leq z < y$ และจากสมการ (13) จะได้ว่า $14 \leq y < 14$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ ดังนั้น จึงไม่มีผลเฉลย

กรณีที่ 2: $y < x \leq z$ หรือ $y \leq z < x$ ดังนั้นจากสมการ (1) จะได้ว่า $\frac{7}{y} > \frac{1}{2}$ นั่นคือ $y \leq 13$ และจาก $5 \leq y$ เพราะฉะนั้นสามารถแยกพิจารณาจำนวนเต็มบวก y โดยที่ $5 \leq y \leq 13$ ได้ดังนี้

กรณีที่ 2.1 $y = 5$ ดังนั้นจากสมการ (1) จะได้ว่า

$$\frac{1}{x} + \frac{4}{z} = \frac{1}{10} \quad (14)$$

ถ้า $y < x \leq z$ และจากสมการ (14) จะได้ว่า $6 \leq x \leq 50$ และเมื่อแทนค่า x ในสมการ (14) แล้วพิจารณาค่า z ที่เป็นจำนวนเต็มบวก ทำให้ได้ผลเฉลย (x, y, z) ดังต่อไปนี้ $(11, 5, 440)$, $(12, 5, 240)$, $(14, 5, 140)$, $(15, 5, 120)$, $(18, 5, 90)$, $(20, 5, 80)$, $(26, 5, 65)$, $(30, 5, 60)$, $(35, 5, 56)$ และ $(50, 5, 50)$

ถ้า $y \leq z < x$ และจากสมการ (14) จะได้ว่า $5 \leq z \leq 49$ และเมื่อแทนค่า z ในสมการ (14) แล้วพิจารณาค่า x ที่เป็นจำนวนเต็มบวก ทำให้ได้ผลเฉลย (x, y, z) ดังต่อไปนี้ $(410, 5, 41)$, $(210, 5, 42)$, $(110, 5, 44)$, $(90, 5, 45)$ และ $(60, 5, 48)$

กรณีที่ 2.2 $y = 6$ ดังนั้นจากสมการ (1) จะได้ว่า

$$\frac{1}{x} + \frac{4}{z} = \frac{1}{6} \quad (15)$$

ถ้า $y < x \leq z$ และจากสมการ (15) จะได้ว่า $7 \leq x \leq 30$ และเมื่อแทนค่า x ในสมการ (15) แล้วพิจารณาค่า z ที่เป็นจำนวนเต็มบวก ทำให้ได้ผลเฉลย (x, y, z) ดังต่อไปนี้ $(7, 6, 168)$, $(8, 6, 96)$, $(9, 6, 72)$, $(10, 6, 60)$, $(12, 6, 48)$, $(14, 6, 42)$, $(15, 6, 40)$, $(18, 6, 36)$, $(22, 6, 33)$, $(24, 6, 32)$ และ $(30, 6, 30)$

ถ้า $y \leq z < x$ และจากสมการ (15) จะได้ว่า $6 \leq z \leq 29$ และเมื่อแทนค่า z ในสมการ (15) แล้วพิจารณาค่า x ที่เป็นจำนวนเต็มบวก ทำให้ได้ผลเฉลย (x, y, z) ดังต่อไปนี้ $(150, 6, 25)$, $(78, 6, 26)$, $(54, 6, 27)$ และ $(42, 6, 28)$

กรณีที่ 2.3 $y = 7$ ดังนั้นจากสมการ (1) จะได้ว่า

$$\frac{1}{x} + \frac{4}{z} = \frac{3}{14} \quad (16)$$

ถ้า $y < x \leq z$ และจากสมการ (16) จะได้ว่า $8 \leq x \leq 23$ และเมื่อแทนค่า x ในสมการ (16) แล้วพิจารณาค่า z ที่เป็นจำนวนเต็มบวก ทำให้ได้ผลเฉลย (x, y, z) ดังต่อไปนี้ $(10, 7, 35)$, $(14, 7, 28)$ และ $(21, 7, 24)$

ถ้า $y \leq z < x$ และจากสมการ (16) จะได้ว่า $7 \leq z \leq 23$ และเมื่อแทนค่า z ในสมการ (16) แล้วพิจารณาค่า x ที่เป็นจำนวนเต็มบวก ทำให้ได้ผลเฉลย (x, y, z) ดังต่อไปนี้ $(266, 7, 19)$, $(70, 7, 20)$ และ $(42, 7, 21)$

กรณีที่ 2.4 $y = 8$ ดังนั้นจากสมการ (1) จะได้ว่า

$$\frac{1}{x} + \frac{4}{z} = \frac{1}{4} \quad (17)$$

ถ้า $y < x \leq z$ และจากสมการ (17) จะได้ว่า $9 \leq x \leq 20$ และเมื่อแทนค่า x ในสมการ (17) แล้วพิจารณาค่า z ที่เป็นจำนวนเต็มบวก ทำให้ได้ผลเฉลย (x, y, z) ดังต่อไปนี้ $(12, 8, 24)$ และ $(20, 8, 20)$

ถ้า $y \leq z < x$ และจากสมการ (17) จะได้ว่า $8 \leq z \leq 19$ และเมื่อแทนค่า z ในสมการ (17) แล้วพิจารณาค่า x ที่เป็นจำนวนเต็มบวก ทำให้ได้ผลเฉลย (x, y, z) ดังต่อไปนี้ $(68, 8, 17)$ และ $(36, 8, 18)$

กรณีที่ 2.5 $y = 9$ ดังนั้นจากสมการ (1) จะได้ว่า

$$\frac{1}{x} + \frac{4}{z} = \frac{5}{18} \quad (18)$$

ถ้า $y < x \leq z$ และจากสมการ (18) จะได้ว่า $10 \leq x \leq 18$ และเมื่อแทนค่า x ในสมการ (18) แล้วพิจารณาค่า z ที่เป็นจำนวนเต็มบวก ทำให้ได้ผลเฉลย $(x, y, z) = (18, 9, 18)$

ถ้า $y \leq z < x$ และจากสมการ (18) จะได้ว่า $9 \leq z \leq 17$ และเมื่อแทนค่า z ในสมการ (18) แล้วพิจารณาค่า x ที่เป็นจำนวนเต็มบวก ทำให้ได้ผลเฉลย (x, y, z) ดังต่อไปนี้ $(90, 9, 15)$ และ $(36, 9, 16)$

กรณีที่ 2.6 $y = 10$ ดังนั้นจากสมการ (1) จะได้ว่า

$$\frac{1}{x} + \frac{4}{z} = \frac{3}{10} \quad (19)$$

ถ้า $y < x \leq z$ และจากสมการ (19) จะได้ว่า $11 \leq x \leq 16$ และเมื่อแทนค่า x ในสมการ (19) จะได้ว่า ไม่มีค่า z ที่เป็นจำนวนเต็มบวก ดังนั้น จึงไม่มีผลเฉลย

ถ้า $y \leq z < x$ และจากสมการ (19) จะได้ว่า $10 \leq z \leq 16$ และเมื่อแทนค่า z ในสมการ (19) แล้วพิจารณาค่า x ที่เป็นจำนวนเต็มบวก ทำให้ได้ผลเฉลย (x, y, z) ดังต่อไปนี้ $(70, 10, 14)$, $(30, 10, 15)$ และ $(20, 10, 16)$

กรณีที่ 2.7 $y = 11$ ดังนั้นจากสมการ (1) จะได้ว่า

$$\frac{1}{x} + \frac{4}{z} = \frac{7}{22} \quad (20)$$

ถ้า $y < x \leq z$ และจากสมการ (20) จะได้ว่า $12 \leq x \leq 15$ และเมื่อแทนค่า x ในสมการ (20) จะได้ว่า ไม่มีค่า z ที่เป็นจำนวนเต็มบวก ดังนั้น จึงไม่มีผลเฉลย

ถ้า $y \leq z < x$ และจากสมการ (20) จะได้ว่า $11 \leq z \leq 15$ และเมื่อแทนค่า z ในสมการ (20) จะได้ว่า ไม่มีค่า x ที่เป็นจำนวนเต็มบวก ดังนั้น จึงไม่มีผลเฉลย

กรณีที่ 2.8 $y = 12$ ดังนั้นจากสมการ (1) จะได้ว่า

$$\frac{1}{x} + \frac{4}{z} = \frac{1}{3} \quad (21)$$

ถ้า $y < x \leq z$ และจากสมการ (21) จะได้ว่า $13 \leq x \leq 15$ และเมื่อแทนค่า x ในสมการ (21) แล้วพิจารณาค่า z ที่เป็นจำนวนเต็มบวก ทำให้ได้ผลเฉลย $(x, y, z) = (15, 12, 15)$

ถ้า $y \leq z < x$ และจากสมการ (21) จะได้ว่า $12 \leq z \leq 14$ และเมื่อแทนค่า z ในสมการ (21) แล้วพิจารณาค่า x ที่เป็นจำนวนเต็มบวก ทำให้ได้ผลเฉลย (x, y, z) ดังต่อไปนี้ $(39, 12, 13)$ และ $(21, 12, 14)$

กรณีที่ 2.9 $y = 13$ ดังนั้นจากสมการ (1) จะได้ว่า

$$\frac{1}{x} + \frac{4}{z} = \frac{9}{26} \quad (22)$$

ถ้า $y < x \leq z$ และจากสมการ (22) จะได้ว่า $x = 14$ และเมื่อแทนค่า x ในสมการ (22) จะได้ว่า z ไม่เป็นจำนวนเต็มบวก ดังนั้น จึงไม่มีผลเฉลย

ถ้า $y \leq z < x$ และจากสมการ (22) จะได้ว่า $13 \leq z \leq 14$ และเมื่อแทนค่า z ในสมการ (22) แล้วพิจารณาค่า x ที่เป็นจำนวนเต็มบวก ทำให้ได้ผลเฉลย $(x, y, z) = (26, 13, 13)$

กรณีที่ 3: $z < x \leq y$ หรือ $z < y < x$ ดังนั้นจากสมการ (1) จะได้ว่า $\frac{7}{z} > \frac{1}{2}$ นั่นคือ $z \leq 13$ และจาก $9 \leq z$ เพราะฉะนั้นสามารถแยกพิจารณาจำนวนเต็มบวก z โดยที่ $9 \leq z \leq 13$ ได้ดังนี้

กรณีที่ 3.1 $z = 9$ ดังนั้นจากสมการ (1) จะได้ว่า

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = \frac{1}{18} \quad (23)$$

ถ้า $z < x \leq y$ และจากสมการ (23) จะได้ว่า $10 \leq x \leq 54$ และเมื่อแทนค่า x ในสมการ (23) แล้วพิจารณาค่า y ที่เป็นจำนวนเต็มบวก ทำให้ได้ผลเฉลย (x, y, z) ดังต่อไปนี้ $(19, 684, 9)$, $(20, 360, 9)$, $(21, 252, 9)$, $(22, 198, 9)$, $(24, 144, 9)$, $(26, 117, 9)$, $(27, 108, 9)$, $(30, 90, 9)$, $(36, 72, 9)$, $(42, 63, 9)$, $(45, 60, 9)$ และ $(54, 54, 9)$

ถ้า $z < y < x$ และจากสมการ (23) จะได้ว่า $10 \leq y \leq 53$ และเมื่อแทนค่า y ในสมการ (23) แล้วพิจารณาค่า x ที่เป็นจำนวนเต็มบวก ทำให้ได้ผลเฉลย (x, y, z) ดังต่อไปนี้ $(666, 37, 9)$, $(342, 38, 9)$, $(234, 39, 9)$, $(180, 40, 9)$, $(126, 42, 9)$, $(99, 44, 9)$, $(90, 45, 9)$ และ $(72, 48, 9)$

กรณีที่ 3.2 $z = 10$ ดังนั้นจากสมการ (1) จะได้ว่า

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = \frac{1}{10} \quad (24)$$

ถ้า $z < x \leq y$ และจากสมการ (24) จะได้ว่า $11 \leq x \leq 30$ และเมื่อแทนค่า x ในสมการ (24) แล้วพิจารณาค่า y ที่เป็นจำนวนเต็มบวก ทำให้ได้ผลเฉลย (x, y, z) ดังต่อไปนี้ $(11, 220, 10)$, $(12, 120, 10)$, $(14, 70, 10)$, $(15, 60, 10)$, $(18, 45, 10)$, $(20, 40, 10)$ และ $(30, 30, 10)$

ถ้า $z < y < x$ และจากสมการ (24) จะได้ว่า $11 \leq y \leq 29$ และเมื่อแทนค่า y ในสมการ (24) แล้วพิจารณาค่า x ที่เป็นจำนวนเต็มบวก ทำให้ได้ผลเฉลย (x, y, z) ดังต่อไปนี้ $(210, 21, 10)$, $(110, 22, 10)$, $(60, 24, 10)$, $(50, 25, 10)$ และ $(35, 28, 10)$

กรณีที่ 3.3 $z = 11$ ดังนั้นจากสมการ (1) จะได้ว่า

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = \frac{3}{22} \quad (25)$$

ถ้า $z < x \leq y$ และจากสมการ (25) จะได้ว่า $12 \leq x \leq 22$ และเมื่อแทนค่า x ในสมการ (25) แล้วพิจารณาค่า y ที่เป็นจำนวนเต็มบวก ทำให้ได้ผลเฉลย $(x, y, z) = (22, 22, 11)$

ถ้า $z < y < x$ และจากสมการ (25) จะได้ว่า $12 \leq y \leq 21$ และเมื่อแทนค่า y ในสมการ (25) แล้วพิจารณาค่า x ที่เป็นจำนวนเต็มบวก ทำให้ได้ผลเฉลย (x, y, z) ดังต่อไปนี้ $(330, 15, 11)$ และ $(88, 16, 11)$

กรณีที่ 3.4 $z = 12$ ดังนั้นจากสมการ (1) จะได้ว่า

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = \frac{1}{6} \quad (26)$$

ถ้า $z < x \leq y$ และจากสมการ (26) จะได้ว่า $13 \leq x \leq 18$ และเมื่อแทนค่า x ในสมการ (26) แล้วพิจารณาค่า y ที่เป็นจำนวนเต็มบวก ทำให้ได้ผลเฉลย (x, y, z) ดังต่อไปนี้ $(14, 21, 12)$, $(15, 20, 12)$ และ $(18, 18, 12)$

ถ้า $z < y < x$ และจากสมการ (26) จะได้ว่า $13 \leq y \leq 17$ และเมื่อแทนค่า y ในสมการ (26) แล้วพิจารณาค่า x ที่เป็นจำนวนเต็มบวก ทำให้ได้ผลเฉลย (x, y, z) ดังต่อไปนี้ $(78, 13, 12)$, $(42, 14, 12)$, $(30, 15, 12)$ และ $(24, 16, 12)$

กรณีที่ 3.5 $z = 13$ ดังนั้นจากสมการ (1) จะได้ว่า

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = \frac{5}{26} \quad (27)$$

ถ้า $z < x \leq y$ และจากสมการ (27) จะได้ว่า $14 \leq x \leq 15$ และเมื่อแทนค่า x ในสมการ (27) จะได้ว่า ไม่มีค่า y ที่เป็นจำนวนเต็มบวก ดังนั้น จึงไม่มีผลเฉลย

ถ้า $z < y < x$ และจากสมการ (27) จะได้ว่า $14 \leq y \leq 15$ และเมื่อแทนค่า y ในสมการ (27) จะได้ว่า ไม่มีค่า x ที่เป็นจำนวนเต็มบวก ดังนั้น จึงไม่มีผลเฉลย

สรุปผลการวิจัย

จากวิธีการดำเนินการวิจัยดังกล่าว ทำให้ทราบว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{4}{z} = \frac{1}{2}$ มีผลเฉลยจำนวนเต็มบวก (x, y, z) ทั้งหมด จำนวน 158 ผลเฉลย ได้แก่ $(3, 13, 312)$, $(3, 14, 168)$, $(3, 15, 120)$, $(3, 16, 96)$, $(3, 18, 72)$, $(3, 20, 60)$, $(3, 21, 56)$, $(3, 24, 48)$, $(3, 28, 42)$, $(3, 30, 40)$, $(3, 36, 36)$, $(3, 300, 25)$, $(3, 156, 26)$, $(3, 108, 27)$, $(3, 84, 28)$, $(3, 60, 30)$, $(3, 48, 32)$, $(3, 44, 33)$, $(4, 9, 144)$, $(4, 10, 80)$, $(4, 12, 48)$, $(4, 16, 32)$, $(4, 24, 24)$, $(4, 136, 17)$, $(4, 72, 18)$, $(4, 40, 20)$, $(5, 7, 280)$, $(5, 8, 80)$, $(5, 10, 40)$, $(5, 12, 30)$, $(5, 15, 24)$, $(5, 20, 20)$, $(5, 140, 14)$, $(5, 60, 15)$, $(5, 40, 16)$, $(6, 7, 84)$, $(6, 8, 48)$, $(6, 9, 36)$, $(6, 10, 30)$, $(6, 12, 24)$, $(6, 14, 21)$, $(6, 15, 20)$, $(6, 18, 18)$, $(6, 78, 13)$, $(6, 42, 14)$, $(6, 30, 15)$, $(6, 24, 16)$, $(7, 7, 56)$, $(7, 12, 21)$, $(7, 84, 12)$, $(7, 28, 14)$, $(8, 8, 32)$, $(8, 16, 16)$, $(8, 176, 11)$, $(8, 48, 12)$, $(9, 9, 24)$, $(9, 12, 18)$, $(9, 36, 12)$.

(10, 10, 20), (10, 15, 15), (10, 55, 11), (10, 30, 12), (11, 44, 11), (12, 12, 16), (12, 24, 12), (14, 14, 14), (11, 5, 440), (12, 5, 240), (14, 5, 140), (15, 5, 120), (18, 5, 90), (20, 5, 80), (26, 5, 65), (30, 5, 60), (35, 5, 56), (50, 5, 50), (410, 5, 41), (210, 5, 42), (110, 5, 44), (90, 5, 45), (60, 5, 48), (7, 6, 168), (8, 6, 96), (9, 6, 72), (10, 6, 60), (12, 6, 48), (14, 6, 42), (15, 6, 40), (18, 6, 36), (22, 6, 33), (24, 6, 32), (30, 6, 30), (150, 6, 25), (78, 6, 26), (54, 6, 27), (42, 6, 28), (10, 7, 35), (14, 7, 28), (21, 7, 24), (266, 7, 19), (70, 7, 20), (42, 7, 21), (12, 8, 24), (20, 8, 20), (68, 8, 17), (36, 8, 18), (18, 9, 18), (90, 9, 15), (36, 9, 16), (70, 10, 14), (30, 10, 15), (20, 10, 16), (15, 12, 15), (39, 12, 13), (21, 12, 14), (26, 13, 13), (19, 684, 9), (20, 360, 9), (21, 252, 9), (22, 198, 9), (24, 144, 9), (26, 117, 9), (27, 108, 9), (30, 90, 9), (36, 72, 9), (42, 63, 9), (45, 60, 9), (54, 54, 9), (666, 37, 9), (342, 38, 9), (234, 39, 9), (180, 40, 9), (126, 42, 9), (99, 44, 9), (90, 45, 9), (72, 48, 9), (11, 220, 10), (12, 120, 10), (14, 70, 10), (15, 60, 10), (18, 45, 10), (20, 40, 10), (30, 30, 10), (210, 21, 10), (110, 22, 10), (60, 24, 10), (50, 25, 10), (35, 28, 10), (22, 22, 11), (330, 15, 11), (88, 16, 11), (14, 21, 12), (15, 20, 12), (18, 18, 12), (78, 13, 12), (42, 14, 12), (30, 15, 12) และ (24, 16, 12) ซึ่งจากขั้นตอนในการหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์นี้ สามารถนำไปประยุกต์ใช้ในการหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ที่อยู่ในรูปแบบคล้ายกันได้

ข้อเสนอแนะ

สิ่งที่น่าสนใจในการศึกษาค้นคว้าต่อไป คือ การหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{4}{z} = \frac{1}{n}$ เมื่อ x, y, z และ n เป็นจำนวนเต็มบวก

กิตติกรรมประกาศ

ผู้วิจัยขอขอบคุณ สถาบันวิจัยและพัฒนา และคณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเทพสตรี ที่ให้การสนับสนุนในการทำวิจัยครั้งนี้

เอกสารอ้างอิง

- [1] Sándor, J. (2013). A note on a Diophantine equation. *Notes on Number Theory and Discrete Mathematics*, 19(4), 1-3.
- [2] Pakapongpun, A. (2019). Integral solutions of the Diophantine equation $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z} = \frac{1}{2}$. *Mathematical Journal by the Mathematical Association of Thailand under the Patronage of His Majesty the King*, 64(699), 36-43.
- [3] Zhao, W., Lu, J. and Wang, L. (2021). On the integral solutions of the Egyptian fraction equation $\frac{a}{p} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$. *AIMS Mathematics*, 6(5), 4930-4937.

- [4] Sándor, J. and Atanassov, K. (2021). On a Diophantine equation arising in the history of mathematics. *Notes on Number Theory and Discrete Mathematics*, 27(1), 70-75.
- [5] Atri, R. (2022). On the Diophantine equations $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{4}$ and $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} = \frac{1}{4}$. *International Journal of Science and Research*, 11(1), 573-574.
- [6] Chinram, R., Sirikantisophon, K. and Kaewchay, S. (2022). Positive integer solutions of the Diophantine equation $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z} = \frac{1}{3}$. *International Journal of Mathematics and Computer Science*, 17(3), 1051-1059.
- [7] Srimud, K., Makate, N., Ampawa, T. and Jantree, T. (2022). On the Diophantine equation $\frac{2}{x} + \frac{3}{y} + \frac{4}{z} = \frac{1}{2}$. *Progress in Applied Science and Technology*, 12(1), 11-16.
- [8] Tadee, S. and Poopra, S. (2023). On the Diophantine equation $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{n}$. *International Journal of Mathematics and Computer Science*, 18(2), 173-177.
- [9] Taher, H.S. (2023). On the Diophantine equation $\frac{1}{x} + \frac{3}{y} + \frac{5}{z} = \frac{3}{4}$. *Advances in Mathematics: Scientific Journal*, 12(1), 63-71.
- [10] Sudsanguan, P. and Sudsanguan, W. (2024). The positive integer solutions of the Diophantine equation $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{4}{z} = \frac{1}{4}$. *PBRU Science Journal*, 21(1), 75-89. (in Thai)