

การคำนวณสมการการเคลื่อนที่ของอนุภาคในสนามไฟฟ้าคงที่และสนามแม่เหล็กด้วยวิธีการแบบดั้งเดิม

The Calculated Equation of Motion of a Single Particle in the Electric Fields and Magnetic Fields by Classical Process

วรารุ สอาดสิน, สรายุทธ พานเทียน*

คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเทพสตรี อำเภอเมืองลพบุรี จังหวัดลพบุรี 15000

Warawut Sa-adsin, Sarayut Pantian*

Faculty of Science and Technology, Thepsatri Rajabhat University, Meung, Lopburi province 15000

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้เรามุ่งเน้นนำเสนอการใช้ทักษะคณิตศาสตร์ระดับปริญญาตรีหาสมการการเคลื่อนที่ของอนุภาคเดี่ยวที่อยู่ภายใต้สนามไฟฟ้าคงที่ในแนวแกน x และแกน y และสนามแม่เหล็กสม่ำเสมอในแนวแกน z ด้วยวิธีแบบดั้งเดิมด้วยการใช้สมการออยเลอร์-ลากรางจ์พบว่าสมการการเคลื่อนที่สอดคล้องกับวิธีที่ใช้เมทริกซ์ ความสัมพันธ์ระหว่างสัมประสิทธิ์ในแกนแกน x และแกน y อยู่ในรูป $A = -D$ และ $B = C$ ค่าสัมประสิทธิ์ที่ได้มีความซับซ้อนมากกว่าวิธีการสมมติตัวแปรและวิธีการเมทริกซ์

คำสำคัญ : กลศาสตร์ควอนตัม, กิริยาแบบดั้งเดิม, อินทิกรัลตามเส้นทาง, สนามไฟฟ้า, สนามแม่เหล็ก

Abstract

This research aims to present the using of undergraduate math content, solved differential equation problem, to find the equations of motion of a single particle under constant electric fields in the x - and y -axis and uniform magnetic fields in the z -axis by Euler-Lagrange's equation. We found

* Corresponding author : sarayut.p@lawasri.tru.ac.th

that the equation of motion corresponds to the matrix method. The relationship between the coefficients in the x-axis and the y-axis is in the form $A = -D$ and $B = C$. The resulting coefficients are more complex than the assume a variable and matrix methods.

Keywords : quantum mechanics, classical action, path integral, electric field, magnetic field

ที่มาและความสำคัญ

วิชาฟิสิกส์เป็นวิชาที่มุ่งเน้นอธิบายปรากฏการณ์ธรรมชาติเชิงกายภาพซึ่งแบ่งออกเป็นแขนงย่อยมากมาย หนึ่งในแขนงย่อยที่ได้รับความสนใจได้แก่กลศาสตร์ควอนตัม (Quantum Mechanics) ที่เน้นอธิบายปรากฏการณ์ทางธรรมชาติของอนุภาคขนาดเล็กในระดับอะตอมที่มีความไม่แน่นอนสูง ด้วยพฤติกรรมของอนุภาคเหล่านี้จึงไม่อาจใช้กลศาสตร์แบบดั้งเดิม (Classical Mechanics) มาคำนวณหาตำแหน่ง ความเร็ว หรือโมเมนตัมของอนุภาคที่แน่นอนได้ อย่างไรก็ตามในการคำนวณทางกลศาสตร์ควอนตัมยังต้องอาศัยรากฐานจากกลศาสตร์แบบดั้งเดิมพัฒนาแนวคิดขึ้นมาอย่างต่อเนื่องจากกลศาสตร์แบบนิวตันไปสู่กลศาสตร์ลากรางจ์ จากนั้นพัฒนาไปยังกลศาสตร์แบบแฮมิลตันและกลศาสตร์แบบแฮมิลตัน-จาโคบี ผสมรวมกับแนวคิดต่าง ๆ จนท้ายที่สุดกลายเป็นกระบวนการคำนวณแบบกลศาสตร์ควอนตัมที่ใช้กันอยู่ในปัจจุบัน [1]

กลศาสตร์ควอนตัมในปัจจุบันที่ใช้ในการศึกษาและวิจัยแบ่งออกเป็น 3 แนวคิด ได้แก่ 1. แนวคิดแบบชโรดิงเงอร์ (Schrodinger picture) ที่ใช้กลศาสตร์คลื่นเป็นหลักในการศึกษา 2. แนวคิดแบบไฮเซนเบิร์ก (Heisenberg picture) ที่ใช้กลศาสตร์เมทริกซ์เป็นหลักในการศึกษา 3. แนวคิดแบบของไฟน์แมน (Feynman picture) ที่ใช้แนวคิดการอินทิเกรตไม่ขึ้นกับเส้นทางเป็นหลัก ทั้งสามแนวคิดนี้สามารถอธิบายในสิ่งเดียวกันได้ขึ้นกับผู้วิจัยจะเลือกใช้ตามความเหมาะสมกับสิ่งที่ตนเองต้องการศึกษา [2] ทั้งนี้ พบว่าการทำวิจัยในปัจจุบันมีการนำแนวคิดแบบของไฟน์แมนมาใช้ในการอธิบายพฤติกรรมของอนุภาคมากขึ้นเนื่องจากสามารถต่อยอดการคำนวณการศึกษาพฤติกรรมของอนุภาคในทฤษฎีสถานควอนตัม (Quantum field theory) ซึ่งเป็นการผสมรวมแนวคิดของทฤษฎีสัมพัทธภาพกับทฤษฎีควอนตัมได้ใกล้เคียงกับผลการทดลองอย่างแม่นยำ แต่ด้วยการคำนวณตามแนวคิดของไฟน์แมนมีความซับซ้อนในทางคณิตศาสตร์ค่อนข้างมาก จึงเป็นเหตุให้การศึกษากลศาสตร์ควอนตัมตามแนวคิดแบบของไฟน์แมนส่วนมากจะศึกษาในระดับบัณฑิตศึกษาขึ้นไป

การคำนวณพฤติกรรมของอนุภาคในสนามไฟฟ้าคงที่และสนามแม่เหล็กตามแนวคิดแบบของไฟน์แมนได้ถูกศึกษาและวิจัยแล้ว [2-4] ด้วยวิธีการใช้เมทริกซ์หรืออาจใช้ฟังก์ชันกรีน (Green's function) เข้าช่วยเพื่อให้การแก้สมการง่ายขึ้น ทว่าด้วยกระบวนการดังกล่าวจำเป็นต้องใช้ทักษะและความเข้าใจในคณิตศาสตร์ค่อนข้างสูง เป็นเหตุให้นักศึกษาในระดับปริญญาตรีทำความเข้าใจกระบวนการคำนวณได้ยาก

งานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์นำเสนอวิธีการหาสมการการเคลื่อนที่แบบดั้งเดิมของอนุภาคในสนามไฟฟ้าคงที่และสนามแม่เหล็กด้วยวิธีการแบบดั้งเดิม ซึ่งเป็นส่วนหนึ่งของการคำนวณกิริยาแบบดั้งเดิม (Classical action) ที่จะนำไปสู่การหาตัวแพร่ (Propagator) ของกลศาสตร์ควอนตัมตามแนวคิดของไฟน์แมนซึ่งเป็นวิธีที่นักศึกษาระดับวิทยาศาสตร์บัณฑิตสามารถคำนวณได้ เพื่อเป็นทักษะพื้นฐานสำคัญที่จะทำให้บัณฑิตสามารถต่อยอดทักษะดังกล่าวให้เกิดความ

เข้าใจและต่อยอดความรู้ในระดับสูงต่อไป

วิธีการดำเนินการวิจัย

การดำเนินการวิจัยแบ่งออกเป็น ส่วนดังต่อไปนี้

1. กำหนดสถานะการณ์ที่มีผลต่อการเคลื่อนที่ของอนุภาค
2. ออกแบบการคำนวณ โดยการคำนวณมีขั้นตอนดังต่อไปนี้

(2.1) นำศักยภาพจากสถานะการณ์กำหนดไว้จากข้อที่ 1 มาระบุลากรางเจียนของระบบดังสมการ

$$L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}; t) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \sum V(x, y, z), \quad (1)$$

(2.2) คำนวณหาสมการการเคลื่อนที่โดยใช้สมการออยเลอร์-ลากรางจ์ (Euler-Lagrange's equation) ในแนวแกน x และแนวแกน y ตามสมการ

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dL}{d\dot{x}} \right) = \frac{dL}{dx}, \quad (2a)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dL}{d\dot{y}} \right) = \frac{dL}{dy}. \quad (2b)$$

(2.3) จัดรูปสมการให้อยู่ในรูปขึ้นกับ x อย่างเดียว หรือขึ้นกับ y อย่างเดียวเพื่อทำการแก้สมการหาผลเฉลยทั่วไป

(2.4) กำหนดเงื่อนไขขอบเขตเพื่อทำการหาค่าคงที่ที่เลือกได้ (arbitrary constant) ที่ได้จากการอินทิเกรต

3. วิเคราะห์ผลการวิจัย
4. สรุปผลการวิจัย

ผลการวิจัยและอภิปรายผลการวิจัย

ในการนำเสนอผลการวิจัยและอภิปรายผลการวิจัย ผู้วิจัยของนำเสนอเรียงตามหัวข้อวิธีการดำเนินการวิจัยกำหนดไว้ ดังต่อไปนี้

1. กำหนดสถานะการณ์และศักยภาพที่มีผลต่อการเคลื่อนที่ของอนุภาค ในการวิจัยครั้งนี้เราสมมติสถานะการณ์ให้อนุภาคมวล m ที่มีประจุไฟฟ้า q อยู่ภายใต้สนามไฟฟ้าคงที่ในแนวแกน $x - y$ และสนามแม่เหล็กสม่ำเสมอในแนวแกน $+z$ และกำหนดให้ไม่มีการเคลื่อนที่ในแนวแกน z , $\dot{z} = 0$
2. คำนวณหาสมการการเคลื่อนที่ของอนุภาคเดียวในสนามไฟฟ้าคงที่และสนามแม่เหล็กสม่ำเสมอ

(2.1) นำศักยภาพจากสถานะการณกำหนดไว้จากข้อที่ 1 มาระบุลากรานเจียนของระบบดังสมการที่ (1) จะได้ว่า [3]

$$L(\dot{\vec{r}}, \vec{r}, t) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - qE_x x - qE_y y + \frac{m\omega}{2}(xy - yx) \quad (3)$$

เมื่อ $\omega = \frac{e\beta}{mc}$ คือ ความถี่ไซโคลตรอน และ คือ ความเข้มสนามแม่เหล็ก และ e คือ ค่าประจุอิเล็กตรอน และ c คือ อัตราเร็วของแสง และ E_x และ E_y คือ ความเข้มสนามไฟฟ้าในแนวแกน x และ y ตามลำดับ จากสมการที่ (13) จะได้สมการเคลื่อนที่อธิบายสนามไฟฟ้าที่ก่อให้เกิดโพลาริเซชันตามเวลา

(2.2) คำนวณหาสมการการเคลื่อนที่โดยใช้สมการออยเลอร์-ลากรางจ์ ในแนวแกน x และแนวแกน y ตามสมการ (2a) และ (2b) ได้ผลดังสมการ

$$\text{แกน } x ; \quad \ddot{x} - \omega\dot{y} + \frac{qE_x}{m} = 0 \quad \text{หรือ} \quad \ddot{x} = \omega\dot{y} - \frac{qE_x}{m} \quad (4)$$

$$\text{แกน } y ; \quad \ddot{y} - \omega\dot{x} + \frac{qE_y}{m} = 0 \quad \text{หรือ} \quad \ddot{y} = \omega\dot{x} - \frac{qE_y}{m} \quad (5)$$

(2.3) จัดรูปสมการให้อยู่ในรูปขึ้นกับ x อย่างเดียว หรือขึ้นกับ y อย่างเดียวเพื่อทำการแก้สมการหาผลเฉลยทั่วไป สำหรับแกน x เริ่มต้นจากการทำอนุพันธ์สมการ (4) เทียบกับเวลา จะได้

$$\ddot{x} - \omega\ddot{y} = 0 \quad (6)$$

แทนค่าสมการ (5) ลงในสมการ (6) จะได้

$$\ddot{x} - \omega^2\dot{x} = -\frac{\omega q E_y}{m} \quad (7)$$

ทำการอินทิเกรตและแก้สมการเชิงอนุพันธ์อันดับสองโดยสมมติคำตอบให้อยู่ในรูป $x = e^{\mu t}$ รวมทั้งใช้สูตรของออยเลอร์ (Euler's formula) เพื่อแปลงรูปผลเฉลยให้อยู่ในรูปฟังก์ชันตรีโกณ ผลเฉลยทั่วไปเขียนได้ในรูป

$$x(t) = \frac{A}{\omega}\sin\omega t - \frac{B}{\omega}\cos\omega t - \frac{E_y q t}{m\omega} + \text{Const1} \quad (8)$$

กำหนดเงื่อนไขเริ่มต้น $x(0) = 0$ เพื่อหาค่าคงที่ Const1 การสมการ (8) เขียนใหม่ได้ว่า

$$x(t) = \frac{A}{\omega}\sin\omega t - \frac{B}{\omega}\cos\omega t - \frac{E_y q t}{m\omega} + \frac{B}{\omega} \quad (9)$$

เราทำวิธีการลักษณะเดียวกันกับแกน x มาใช้กับแกน y เราได้ผลเฉลยทั่วไปว่า

$$y(t) = \frac{C}{\omega}\sin\omega t - \frac{D}{\omega}\cos\omega t - \frac{E_x q t}{m\omega} + \frac{D}{\omega} \quad (10)$$

นำค่า $x(t)$ และ $y(t)$ จากสมการ (9) และ (10) แทนค่าลงในสมการ (4) เพื่อเทียบความสัมพันธ์ระหว่างสัมประสิทธิ์ A, B, C และ D เราได้

$$-A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t - C\omega\cos\omega t - \frac{E_x q}{m} + \frac{E_x q}{m} = 0 \quad (11)$$

สมการ (11) แสดงให้เห็นความสัมพันธ์ระหว่างสัมประสิทธิ์ว่า $A = -D$ และ $B = C$ ด้วยเหตุนี้ เราจึงมุ่งหาค่าสัมประสิทธิ์ A และ B จากนั้นใช้ความสัมพันธ์นี้เพื่อระบุค่าสัมประสิทธิ์ C และ D อีกครั้งหนึ่ง

- (2.4) กำหนดเงื่อนไขขอบเขตเพื่อทำการหาค่าสัมประสิทธิ์ A และ B และให้สอดคล้องกับการประยุกต์ใช้ในการต่อยอดการคำนวณในงานวิจัยนี้กับการใช้ในการคำนวณด้วยวิธีอินทิเกรตตามวิถีของไฟฟ์แมน จึงกำหนดให้ $x(t_a) = x_a$ และ $x(t_b) = x_b$ สมการ (9) เขียนใหม่ได้ว่า

$$x_a = \frac{A}{\omega} - \frac{B}{\omega} \cos \omega t_a - \frac{E_y q t_a}{m\omega} + \frac{D}{\omega}, \quad (12a)$$

$$x_b = \frac{A}{\omega} - \frac{B}{\omega} \cos \omega t_b - \frac{E_y q t_b}{m\omega} + \frac{D}{\omega} \quad (12b)$$

ในลักษณะเดียวกันกับแกน x เรากำหนดให้ $y(t_a) = y_a$ และ $y(t_b) = y_b$ สมการ (10) เขียนใหม่ได้ว่า

$$y_a = \frac{C}{\omega} - \frac{a}{\omega} \cos \omega t_a - \frac{E_x q t_a}{m\omega} + \frac{D}{\omega}, \quad (13a)$$

$$y_b = \frac{C}{\omega} - \frac{b}{\omega} \cos \omega t_b - \frac{E_x q t_b}{m\omega} + \frac{D}{\omega} \quad (13b)$$

นำสมการ (12a) ลบกับสมการ (12b) และนำสมการ (13a) ลบกับสมการ (13b) จากนั้นนำผลลบของสมการทั้งสองมาใส่ความสัมพันธ์ระหว่างสัมประสิทธิ์ให้อยู่ในรูป A และ B เท่านั้น จากนั้นแก้สมการหาค่าสัมประสิทธิ์ A และ B ซึ่งได้คำตอบดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned} A = & \frac{\omega(x_b - x_a)}{\sin \omega t_b - \sin \omega t_a} + \frac{\omega(y_b - y_a)(\cos \omega t_b - \cos \omega t_a)}{2 - 2 \cos \omega(t_b - t_a)} \\ & - \frac{\omega(x_b - x_a)(\cos \omega t_b - \cos \omega t_a)^2}{\sin \omega t_b - \sin \omega t_a [2 - 2 \cos \omega(t_b - t_a)]} \\ & - \frac{\frac{E_y q(t_b - t_a)}{m}(\cos \omega t_b - \cos \omega t_a)^2}{\sin \omega t_b - \sin \omega t_a [2 - 2 \cos \omega(t_b - t_a)]} \\ & + \frac{\frac{E_x q(t_b - t_a)}{m}(\cos \omega t_b - \cos \omega t_a)}{2 - 2 \cos \omega(t_b - t_a)} + \frac{\frac{E_y q(t_b - t_a)}{m}}{\sin \omega t_b - \sin \omega t_a} \end{aligned} \quad (14)$$

และ

$$\begin{aligned} B = & \frac{\omega(y_b - y_a) \sin \omega t_b - \sin \omega t_a}{2 - 1 \cos \omega(t_b - t_a)} + \frac{\omega(x_b - x_a)(\cos \omega t_b - \cos \omega t_a)}{2 - 2 \cos \omega(t_b - t_a)} \\ & - \frac{\frac{E_y q(t_b - t_a)}{m}(\cos \omega t_b - \cos \omega t_a)}{2 - 2 \cos \omega(t_b - t_a)} - \frac{\frac{E_x q(t_b - t_a)}{m}(\sin \omega t_b - \sin \omega t_a)}{2 - 2 \cos \omega(t_b - t_a)} \end{aligned} \quad (15)$$

สัมประสิทธิ์ที่ได้ตั้งสมการที่ (14) และ สมการที่ (15) นั้น หากแปลความอาจกล่าวได้ว่าเป็นแอมพลิจูดของสมการคลื่นอันเป็นการระบุตำแหน่งของอนุภาคตามแนวคิดแบบดั้งเดิมซึ่งขึ้นกับความถี่ไซโคลตรอนเวลา และขนาดของสนามไฟฟ้าในทิศทางต่าง ๆ สำหรับผลเฉลยแบบเฉพาะเจาะจงของสมการการเคลื่อนที่ของอนุภาคเดี่ยวที่อยู่ภายใต้สนามไฟฟ้าคงที่ในแนวแกน x และแกน y และสนามแม่เหล็กสม่ำเสมอในแนวแกน z นำเสนอในสองแนวแกน แกน x คือสมการ (9) ส่วนแกน y คือสมการ (10) โดยสมการดังกล่าวและค่าสัมประสิทธิ์มีความสอดคล้องกับค่าที่ได้จากการคำนวณด้วยวิธีการใช้เมทริกซ์ [2-3] ถึงแม้ว่าค่าสัมประสิทธิ์ที่ได้จะมีความซับซ้อนแต่กระบวนการและทักษะที่ใช้ในการคำนวณนักศึกษาระดับวิทยาศาสตร์บัณฑิตสามารถคำนวณได้ และสามารถนำไปต่อยอดการหาค่ากิริยาแบบดั้งเดิมเพื่อกำหนดตัวแปรและฟังก์ชันคลื่นตามวิธีการอินทิเกรตตามวิถีของไฟฟ์แมนได้

สรุปผลการวิจัย

การหาสมการการเคลื่อนที่ของอนุภาคเดี่ยวที่อยู่ภายใต้สนามไฟฟ้าคงที่ในแนวแกน x และแกน y และสนามแม่เหล็กสม่ำเสมอในแนวแกน z ด้วยวิธีแบบดั้งเดิมด้วยการใช้สมการออยเลอร์-ลากรางจ์พบว่าสมการการเคลื่อนที่สอดคล้องกับวิธีที่ใช้เมทริกซ์ ความสัมพันธ์ระหว่างสัมประสิทธิ์ในแกนแกน x และแกน y อยู่ในรูป $A = -D$ และ $B = C$ ค่าสัมประสิทธิ์ที่ได้มีความซับซ้อนแต่สามารถใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์ระดับปริญญาตรีคำนวณได้

กิตติกรรมประกาศ

ขอขอบคุณคณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเทพสตรี ที่สนับสนุนสถานที่และเวลารวมถึงผลักดันให้งานวิจัยชิ้นนี้สำเร็จได้ด้วยดี

เอกสารอ้างอิง

- [1] Halliday, D. Resnick, R. and Walker, J. (2005), Fundamental of Physics. 7th Edition. John Wiley and Sons, Inc.
- [2] วิรุฬห์ สายคณิต. (2552), ทฤษฎีควอนตัม. พิมพ์ครั้งที่ 2. โรงพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย. กรุงเทพฯ.
- [3] นิคม ชูศิริ. (2541). อินทิกรัลตามเส้นทางของก๊าซอิเล็กตรอนในระบบสองมิติภายใต้อิทธิพลของแรงฮาร์มอนิกส์ สนามไฟฟ้า สนามแม่เหล็ก และศักย์แบบไร้ระเบียบ. มหาวิทยาลัยทักษิณ.
- [4] เอกพันธ์ จันผง, อัญญชัช ธารสุวรรณ, วิทยา ทิพย์อักษร และ นิคม ชูศิริ, (2551), อินทิกรัลตามเส้นทางสำหรับกึ่งฮาร์มอนิกอสซิลเลเตอร์. วารสารมหาวิทยาลัยทักษิณ. 11(2), 24-29.