

จำนวนโครมาติกของบางกราฟ

The Chromatic Number of Some Graphs

ศิริ สุตสนิท*, จิตศักดิ์ เสียงดัง, ธนกฤต ศรีวิชา, ทะนงศักดิ์ จัตที่

โปรแกรมวิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคำนวณ

คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเชียงราย

Sivaree Sudsanit*, Jitisak Seangdang, Tanakrit Srewicha, Tanongsak jadtee

Department of Mathematics and Computing Science,

Faculty of Science and Technology, Chiang Rai Rajabhat University

บทคัดย่อ

สำหรับกราฟ G ใด ๆ จะเรียกว่ามีการระบายสีจุดบนกราฟ ถ้ากำหนดสีให้แต่ละจุดในกราฟ แล้วจุดที่ประชิดกันจะมีสีต่างกัน และเรียกการระบายสีจุดบนกราฟว่าเป็นกราฟ k สี มากไปกว่านั้นถ้า k เป็นจำนวนที่น้อยที่สุดที่ทำให้ G เป็นกราฟ k สี แล้วเราจะเรียกกราฟ G ว่ามี k เป็น **จำนวนโครมาติก** และแทนด้วยสัญลักษณ์ $\chi(G) = k$

ในงานวิจัยนี้เราต้องการศึกษา จำนวนโครมาติกของไฮเคิลบุคกราฟ แพนกราฟ ปริซึมกราฟ ไลน์กราฟของไฮเคิลบุคกราฟ กราฟลูกอ๊อด และกราฟอมยิ้ม

คำสำคัญ : จำนวนโครมาติก, ไฮเคิลบุคกราฟ, แพนกราฟ, ปริซึมกราฟ, ไลน์กราฟของไฮเคิลบุคกราฟ, กราฟลูกอ๊อด, กราฟอมยิ้ม

Abstract

Let G be a graph. Then G is called Colouring Vertices if we assign a color to each vertex then the adjacent vertices will have different colors and the Colouring Vertices is called k – Colorable Graph. Moreover, if k is the smallest number that makes G a k – Colorable Graph, then we call the graph G to have k as a Chromatic Number and is represented by the symbol $\chi(G) = k$.

* Corresponding author : sivaree.sud@crru.ac.th

The objective of this work is to study the Chromatic Number of Cycle Book Graph, Fan Graph, n-Prism Graph, Line Graph of Cycle Book Graph, Tadpole Graph and Lollipop Graph.

Keywords : Chromatic Number, Cycle Book Graph, Fan Graph, n-Prism Graph, Line Graph of Cycle Book Graph, Tadpole Graph, Lollipop Graph

ที่มาและความสำคัญ

ทฤษฎีกราฟนั้น มีจุดเริ่มจากผลงานตีพิมพ์ของ เลออนฮาร์ด ออยเลอร์ ภายใต้ชื่อ *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis* ในปี ค.ศ. 1736 (พ.ศ. 2279) [1] หรือที่รู้จักกันในนาม ปัญหาสะพานทั้งเจ็ดแห่ง เมืองโคนิกส์เบิร์ก (Seven Bridges of Königsberg) เขาสนใจวิธีที่จะข้ามสะพานทั้ง 7 แห่งนี้ โดยข้ามแต่ละสะพานเพียงครั้งเดียวเท่านั้น จากนั้นทฤษฎีกราฟได้มีการศึกษาอย่างแพร่หลายโดยหนึ่งในนั้นคือการระบายสีของกราฟ ต่อมาในปี ค.ศ. 1852 (พ.ศ. 2395) ฟรานซิส กัทธรี ได้ตั้งปัญหาสี่สี เพื่อศึกษาถึงความเป็นไปได้ที่จะใช้สีเพียง 4 สี เพื่อระบายให้กับประเทศต่าง ๆ บนแผนที่ใด ๆ โดยที่ประเทศเพื่อนบ้านจะไม่มีสีเดียวกัน ซึ่งปัญหาดังกล่าวก็คือปัญหาการระบายสีให้กับจุดในกราฟโดยจุดประชิดกันจะไม่มีสีที่เหมือนกัน ซึ่งเราสามารถแทนประเทศแต่ละประเทศด้วยจุดและมีเงื่อนไขว่า 2 ประเทศใด ๆ ที่เป็นประเทศเพื่อนบ้านกันก็จะถูกแทนด้วยจุด 2 จุดที่ประชิดกัน ซึ่งปัญหาดังกล่าวคือการหาจำนวนโครมาติกของกราฟนั่นเอง

ต่อมาในปี พ.ศ. 2560 [2] นิรุตต์ พิพรรธจินดา จากมหาวิทยาลัยราชภัฏกำแพงเพชร ได้รวบรวมและจัดทำตำราที่เกี่ยวกับทฤษฎีกราฟเบื้องต้นและหนึ่งในองค์ความรู้ที่สำคัญที่ท่านได้รวบรวมจัดทำไว้ในตำราคือ ทฤษฎีบทและนิยามของจำนวนโครมาติกของบางกราฟ อาทิเช่น P_n , C_n และ K_n ซึ่งพบว่า $\chi(P_n) = 2$ สำหรับทุก $n \geq 1$,

$$\chi(C_n) = \begin{cases} 2 & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคู่} \\ 3 & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคี่} \end{cases} \quad \text{และ } \chi(K_m) = m \text{ สำหรับทุก } m \geq 1$$

ผู้วิจัยได้เล็งเห็นถึงความสำคัญในการศึกษาจำนวนโครมาติกของกราฟและพบว่ายังมีอีกหลายกราฟที่ยังไม่ได้ทำการหาจำนวนโครมาติก ผู้วิจัยมีความสนใจที่จะทำการศึกษาและหาจำนวนโครมาติก ของกราฟ 6 กราฟ ได้แก่ ไซเคิลบูคกราฟ แพนกราฟ ปริซึมกราฟ ไลน์กราฟของไซเคิลบูคกราฟ กราฟลูกฮ็อต และกราฟอมยิ้ม

โดยนิยามพื้นฐานของจำนวนโครมาติก การดำเนินการบนกราฟ และนิยามกราฟทั้ง 6 กราฟมีดังต่อไปนี้

บทนิยาม 1 [2] สำหรับกราฟ G ใด ๆ จะเรียกว่ามีการระบายสีจุดบนกราฟ (Colouring Vertices) ถ้ากำหนดสีให้แต่ละจุดในกราฟ โดยที่จุดที่ประชิดกันจะมีสีต่างกัน และถ้าสีที่ใช้มี k สี เรียกกราฟนี้ว่ากราฟ k สี (k – Colorable Graph)

บทนิยาม 2 [2] สำหรับกราฟ G ใด ๆ จะเรียกว่ามี k เป็น **จำนวนโครมาติก (Chromatic Number)** ถ้า k เป็นจำนวนที่น้อยที่สุดที่ทำให้ G เป็นกราฟ k สี จะใช้สัญลักษณ์ $\chi(G)$ แทนจำนวนโครมาติกในกราฟ G

บทนิยาม 3 [2] จะเรียกกราฟ G ที่มี $\chi(G) = k$ ว่าเป็น k - **โครมาติกกราฟ (k -Chromatic Graph)**

บทนิยาม 4 สำหรับกราฟ $G = (V(G), E(G))$ และกราฟ $H = (V(H), E(H))$ ที่ซึ่ง $V(G) \cap V(H) = \emptyset$ จะได้ว่า **การคูณแบบกล่อง (Box Product)** ของกราฟ G และ H จะใช้สัญลักษณ์ $G \square H$ ซึ่งเป็นกราฟที่ประกอบด้วยเซตของจุดและเส้นดังนี้

$$V(G \square H) = V(G) \times V(H) = \{(x, y) \mid x \in V(G) \text{ และ } y \in V(H)\}$$

$$E(G \square H) = \{(u_1, u_2)(v_1, v_2) \mid u_1 = v_1 \text{ และ } u_2 v_2 \in E(H)\}$$

$$\text{หรือ } u_2 = v_2 \text{ และ } u_1 v_1 \in E(G)\}$$

บุคกราฟ (Book Graph) หรือ กราฟหนังสือ กราฟดังกล่าวจะมีแผนภาพคล้ายหนังสือ จะใช้สัญลักษณ์ B_n แทนบุคกราฟที่แต่ละหน้าเป็นไซเคิล C_4 และมีจำนวน n หน้าจะให้นิยามไซเคิลบุคกราฟซึ่งเป็นบุคกราฟอีกหนึ่งแบบที่ครอบคลุมบุคกราฟโดยแต่ละหน้าเป็นไซเคิล C_n

บทนิยาม 5 [2] สำหรับแต่ละ $i = 1, 2, \dots, m$ กำหนดให้ G_i เป็นกราฟที่ไอโซมอร์ฟิกกับไซเคิล C_n ให้เซตของจุดและเส้นของกราฟ G_i คือ $V(G_i) = \{0_i, 1_i, \dots, (n-1)_i\}$ และ $E(G_i) = \{k_i(k+1)_i \mid k = 0, 1, \dots, n-2\} \cup \{0_i(n-1)_i\}$ ที่ซึ่ง $0_i = 0, 1_i = 1 \forall i = 1, \dots, m$ นั่นคือสำหรับทุก $i \neq j, V(G_i) \cap V(G_j) = \{0, 1\}$

ให้ $B_n(m)$ แทน **ไซเคิลบุคกราฟ (Cycle Book Graph)** ที่แต่ละหน้าเป็นไซเคิล C_n และมีจำนวน m หน้า ที่ประกอบด้วยเซตของจุดและเส้นคือ

$$V(B_n(m)) = \bigcup_{i=1}^m V(G_i)$$

และ

$$E(B_n(m)) = \bigcup_{i=1}^m E(G_i)$$

ตามลำดับ

บทนิยาม 6 [3] ให้ $1 \leq m \in \mathbb{Z}^+$ และ $2 \leq n \in \mathbb{Z}^+$ **แฟนกราฟ (Fan Graph)** แทนด้วยสัญลักษณ์ $F_{m,n}$ คือกราฟ $F_{(m,n)} \cong \overline{K}_m + P_n$ กำหนดโดย $V(F_{(m,n)}) = V(\overline{K}_m) \cup V(P_n)$ และ

$$E(F_{m,n}) = E(P_n) \cup \{uv \mid u \in V(\overline{K}_m), v \in V(P_n)\}$$

บทนิยาม 7 [2] จะเรียกกราฟ G ว่าเป็น n -**ปริซึมกราฟ (n -Prisms Graph)** ถ้า $G \cong P_2 \square C_n$

บทนิยาม 8 [4] ให้ $G : (V(G), E(G))$ **ไลน์กราฟ (Line Graph)** ของกราฟ G เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $L(G)$ กำหนดจุดและเส้นดังนี้

$$V(L(G)) = E(G)$$

$$E(L(G)) = \{e_i e_j | e_i \text{ และ } e_j \text{ เป็นเส้นประชิดในกราฟ } G\}$$

บทนิยาม 9 [5] กราฟลูกอ๊อด (Tadpole Graph) แทนด้วยสัญลักษณ์ $T_{n,k}$ คือกราฟที่เกิดจากการเชื่อม C_n และ P_k ด้วยบริดจ์ โดย $3 \leq n \in \mathbb{Z}^+ \leq k \in \mathbb{Z}$

บทนิยาม 10 [6] กราฟมอมยิ้ม (Lollipop Graph) แทนด้วยสัญลักษณ์ $L_{p,k}$ คือกราฟที่เกิดจากการเชื่อม K_p และ P_k ด้วยบริดจ์ โดย $1 \leq p \in \mathbb{Z}^+ \leq k \in \mathbb{Z}$

ผลการวิจัยและอภิปรายผลการวิจัย

ผู้วิจัยได้ทำการศึกษาจำนวนโครมาติกของไฮเคิลบुकกราฟ แพนกราฟ ปริซึมกราฟ ไลน์กราฟของไฮเคิลบुकกราฟ กราฟลูกอ๊อดและกราฟมอมยิ้ม จากการวิจัยพบว่าเราสามารถแยกพิจารณาการหาโครมาติกของไลน์กราฟของไฮเคิลบुकกราฟได้ 2 กรณี ตามขั้นตอนการพิสูจน์ ซึ่งนำเสนอในทฤษฎีบทที่ 4 และ 5 ตามลำดับ สำหรับกราฟที่เหลือ ผู้วิจัยได้นำเสนอการพิสูจน์ในทฤษฎีบทที่แสดงต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1 ให้ $3 \leq n \in \mathbb{Z}^+$ และ $1 \leq m \in \mathbb{Z}^+$ จะได้ว่า

$$\chi(B_n(m)) = \begin{cases} 2 & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคู่} \\ 3 & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคี่} \end{cases}$$

พิสูจน์

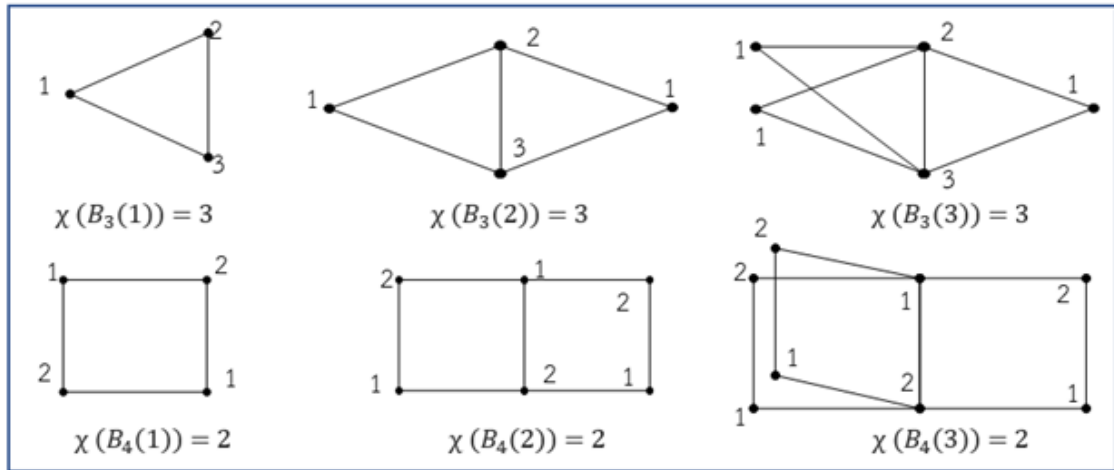
จากนิยามของไฮเคิลบुकกราฟ $B_n(m)$ เราจะพบว่ากราฟดังกล่าวมีแต่ละหน้าเป็นไฮเคิล C_n และมีจำนวนหน้าทั้งหมด m หน้า เมื่อพิจารณาขั้นตอนการกำหนดสีให้กับจุดในกระบวนการหาจำนวนโครมาติก $\chi(B_n(m))$ ในแต่ละหน้าจะพบว่ามีค่าเท่ากับ $\chi(C_n)$ และจาก

$$\chi(C_n) = \begin{cases} 2 & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคู่} \\ 3 & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคี่} \end{cases}$$

ส่งผลให้

$$\chi(B_n(m)) = \begin{cases} 2 & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคู่} \\ 3 & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคี่} \end{cases}$$

□



ภาพที่ 1: แสดง $B_3(m)$ และ $B_4(m)$ $1 \leq m \leq 3$

ทฤษฎีบท 2 ถ้า $1 \leq m \in \mathbb{Z}^+$ และ $2 \leq n \in \mathbb{Z}^+$ แล้ว $\chi(F_{m,n}) = 3$

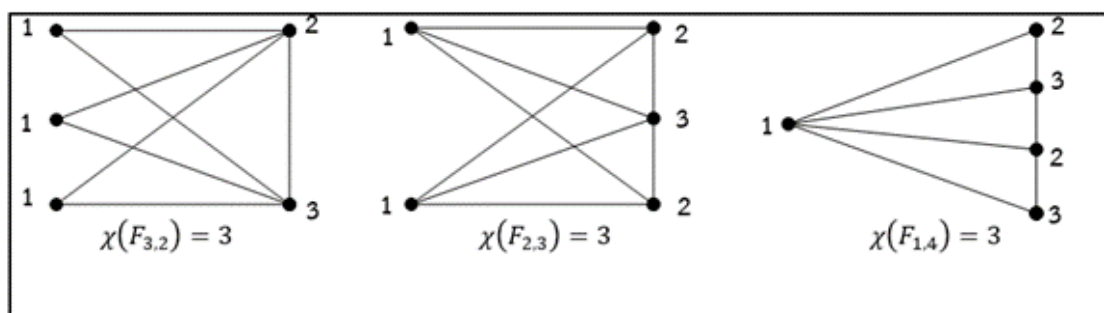
พิสูจน์ เนื่องจากแผนกราฟ $F_{m,n} \cong \overline{K}_m + P_n$ เมื่อพิจารณาขั้นตอนการกำหนดสีให้กับจุดในการหาจำนวนโครมาติก $\chi(F_{m,n})$ จะเห็นได้ว่า $\chi(F_{m,n}) = \chi(F_{1,n}) \forall 1 \leq m \in \mathbb{Z}^+$ เพราะ $F_{m,n}$ คือ $F_{1,n}$ ที่มี m หน้า ดังนั้นการกำหนดสีให้แต่ละหน้าของ $F_{m,n}$ เหมือนกับการกำหนดสีให้กับ $F_{1,n}$

ต่อไปเราจะพิสูจน์ว่า $\chi(F_{1,n}) = 3 \forall 2 \leq n \in \mathbb{Z}^+$ โดยมีขั้นตอนการกำหนดสีให้กับจุดดังนี้ เนื่องจาก $F_{1,n} \cong \overline{K}_1 + P_n$ ดังนั้น $V(F_{1,n}) = V(\overline{K}_1) \cup V(P_n)$

ขั้นตอนที่ 1 กำหนดสีแรกให้กับจุดใน $\overline{K}_1$

ขั้นตอนที่ 2 กำหนดสีให้กับจุดใน P_n โดยลำดับที่เป็นจำนวนคี่ให้เป็นสีที่ 2 และลำดับที่เป็นจำนวนคู่ให้เป็นสีที่ 3 (เนื่องจากทุกคู่ของจุดที่อยู่ในลำดับที่เป็นจำนวนคู่/จำนวนคี่ ไม่ประชิดกัน เพราะฉะนั้นเราจึงสามารถใส่สีเดียวกันได้)

จากขั้นตอนข้างต้น จะพบว่า $\chi(F_{1,n}) = 3 \forall 2 \leq n \in \mathbb{Z}^+$ ส่งผลให้ $\chi(F_{m,n}) = 3$ สำหรับทุก $1 \leq m \in \mathbb{Z}^+$ และ $2 \leq n \in \mathbb{Z}^+$ □



ภาพที่ 2: แสดงแผนกราฟ $F_{3,2}$, $F_{2,3}$ และ $F_{1,4}$ เป็นกราฟ 3 สี

ทฤษฎีบท 3 ให้ G เป็น n -ปริซึมกราฟ โดยที่ $3 \leq n \in \mathbb{Z}^+$ จะพบว่า

$$\chi(G) = \begin{cases} 2 & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคู่} \\ 3 & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคี่} \end{cases}$$

พิสูจน์ ให้ G เป็น n -ปริซึมกราฟ โดยที่ $3 \leq n \in \mathbb{Z}^+$ เนื่องจาก $G \cong P_2 \square C_n$ ดังนั้น G เป็นปริซึมกราฟที่มีหน้าเป็น C_n

ให้ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ เป็นเซตของจุดใน C_n หน้าใดหน้าหนึ่ง

และ $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$ เป็นเซตของจุดใน C_n หน้าที่เหลือ โดย a_i ประชิดกับ b_i สำหรับทุก $1 \leq i \leq n$

สำหรับการหา $\chi(G)$ สามารถแยกพิจารณาการกำหนดสีให้กับจุดเป็น 2 กรณี ดังนี้

กรณีที่ 1 n เป็นจำนวนคี่

ขั้นตอนที่ 1 กำหนดสีให้กับจุด a_i เมื่อ $1 \leq i \leq n-1$ กำหนดโดย

ถ้า i เป็นเลขคี่ใส่สีที่ 1 และ

ถ้า i เป็นเลขคู่ใส่สีที่ 2

แต่เนื่องจาก a_n ประชิดกับ a_1 และ a_{n-1} ทำให้ไม่สามารถใส่สีที่ 1 และสีที่ 2 ได้

ดังนั้นเราจึงใส่สีที่ 3 ให้กับจุด a_n

ขั้นตอนที่ 2 กำหนดสีให้กับจุด b_i เมื่อ $1 \leq i \leq n-1$

ถ้า i เป็นเลขคี่ แล้ว b_i ไม่สามารถใส่สีที่ 1 ได้ เนื่องจาก b_i กับ a_i ประชิดกัน

1 เราจึงกำหนดสีที่ 2 ให้กับ b_i ทุกจุด เมื่อ $1 \leq i \leq n-1$

ถ้า i เป็นเลขคู่ แล้ว b_i ไม่สามารถใส่สีที่ 2 ได้ เนื่องจาก b_i กับ a_i ประชิดกัน

เราจึงกำหนดสีที่ 3 ให้กับ b_i ทุกจุด เมื่อ $1 \leq i \leq n-1$ และ

เนื่องจาก b_n ประชิดกับ b_1, b_{n-1}, a_n ทำให้ไม่สามารถใส่สีที่ 2 และสีที่ 3 ได้

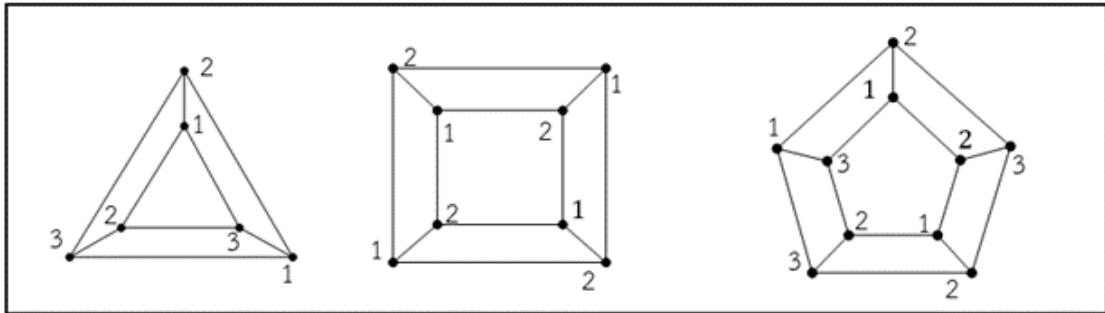
เราจึงกำหนดสีที่ 1 ให้กับ b_n

กรณีที่ 2 n เป็นจำนวนคู่

ขั้นตอนที่ 1 กำหนดสีให้กับจุด a_i โดยถ้า i เป็นเลขคี่ใส่สีที่ 1 และถ้า i เป็นเลขคู่ใส่สีที่ 2

ขั้นตอนที่ 2 เนื่องจาก b_i ประชิดกับ $a_i \forall i$ ดังนั้น b_i จะต้องใส่สีที่ต่างจาก a_i จึงทำให้ได้ว่า b_i ที่ซึ่งถ้า i เป็นเลขคี่ ใส่สี 2 และถ้า i เป็นเลขคู่ใส่สี 1

จากขั้นตอนข้างต้นจะได้ว่าจำนวนโครมาติกของ n -ปริซึมกราฟ จะมี



ภาพที่ 3: แสดงโครมาติกของ 3 -ปริซึมกราฟ, 4 -ปริซึมกราฟ และ 5 -ปริซึมกราฟ

$$\chi(G) = \begin{cases} 2 & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคู่} \\ 3 & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคี่} \end{cases}$$

□

สำหรับการหาโครมาติกของกราฟที่ 4 ซึ่งก็คือไลน์กราฟของไฮเคิลบुकกราฟนั้น ผู้วิจัยสามารถแยกพิจารณาเป็น 2 กรณี ตามขั้นตอนการพิสูจน์ที่แตกต่างกัน ซึ่งผู้วิจัยได้นำเสนอในทฤษฎีบทที่ 4 และ 5 ตามลำดับ ดังนี้

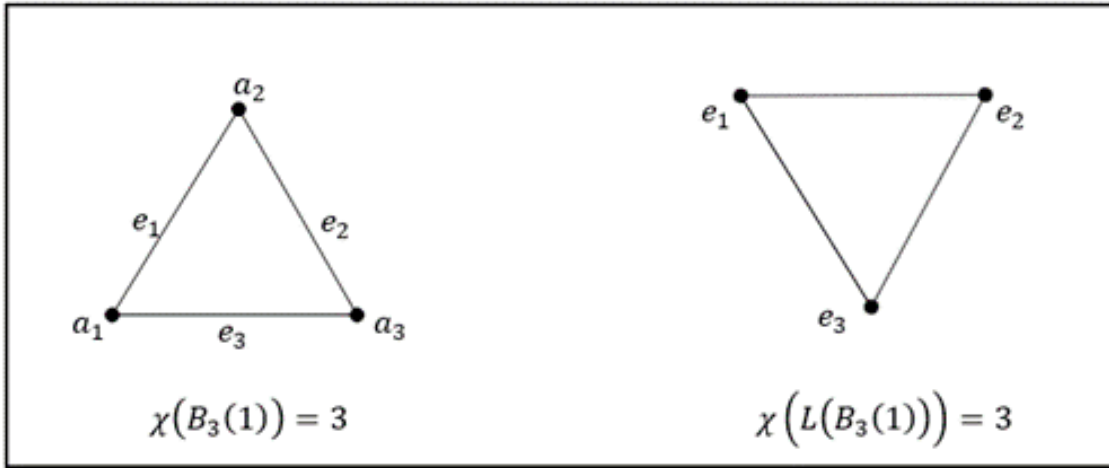
ทฤษฎีบท 4 ให้ $3 \leq n \in \mathbb{Z}^+$ จะได้ว่า

$$\chi(L(B_n(1))) = \begin{cases} 2 & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคู่} \\ 3 & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคี่} \end{cases}$$

พิสูจน์

ให้ $G = B_n(1)$ เนื่องจาก G เป็น (n, n) กราฟ กำหนด $V(G) = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ และ $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_n\}$ โดยที่ $e_i = a_i a_{i+1}$ $1 \leq i \leq n-1$ และ $e_n = a_n a_1$ จากนิยามของไลน์กราฟเราจะได้ว่า $V(L(G)) = E(G) = \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_n\}$ และ $E(L(G)) = \{e_i e_{i+1} | 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{e_1 e_n\}$ ซึ่งเห็นได้ชัดว่า $L(G)$ เป็น (n, n) กราฟ

ต่อไปเราจะพิสูจน์ว่า $G \cong L(G)$ ให้ $f: V(G) \rightarrow V(L(G))$ กำหนดโดย $f(a_i) = e_i \forall 1 \leq i \leq n$ เห็นได้ชัดว่า f เป็นฟังก์ชัน 1-1 ทัวถึง ต่อไปพิจารณา $e_i = a_i a_{i+1} \in E(G) \Leftrightarrow f(a_i) f(a_{i+1}) = e_i e_{i+1} \in E(L(G))$ สำหรับทุก $1 \leq i \leq n-1$ และ $e_n = a_n a_1 \in E(G) \Leftrightarrow f(a_n) f(a_1) = e_n e_1 \in E(L(G))$ ดังนั้นมีไอโซมอร์ฟิซึมจาก G ไป $L(G)$ เพราะฉะนั้น $G \cong L(G)$ ส่งผลให้ $\chi(L(G)) = \chi(G)$ แต่เนื่องจาก $G = B_n(1) = C_n$ เพราะฉะนั้น $\chi(G) = \chi(C_n)$ ด้วย ทำให้เราได้ว่า



ภาพที่ 4: แสดงกราฟและโครมาติกของกราฟ $B_3(1)$ และ $L(B_3(1))$

$$(L(B_n(1))) = \begin{cases} 2 & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคู่} \\ 3 & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคี่} \end{cases}$$

□

ทฤษฎีบท 5 ให้ $2 \leq m \in \mathbb{Z}^+$ $3 \leq n \in \mathbb{Z}^+$ จะได้ว่า $\chi(L(B_n(m))) = m + 1$

พิสูจน์ ให้ $B_n(m)$ เป็นไฮเคิลบุคกราฟ ที่แต่ละหน้าเป็นไฮเคิล C_n และมีจำนวน m หน้า โดยที่ $2 \leq m \in \mathbb{Z}^+$ และ $3 \leq n \in \mathbb{Z}^+$

กำหนดให้กราฟ G_i เป็นกราฟที่ไอโซมอฟิกกับไฮเคิลกราฟ C_n เมื่อ $1 \leq i \leq m$ โดยที่ $V(G_i) = \{0_i, 1_i, 2_i, \dots, (n-1)_i\}$ โดย 0_i ประชิดกับ $(n-1)_i$ และ n_i ประชิดกับ $(n+1)_i \forall 0 \leq n \leq n-2$

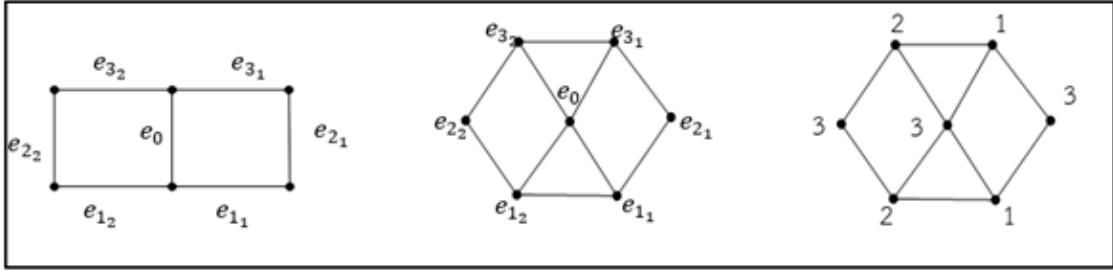
จากนิยามไฮเคิลบุคกราฟ กำหนดให้ $0_i = 0, 1_i = 1 \forall i = 1, \dots, m$

$$e_0 = 01,$$

$$e_{ai} = a_i(a+1)_i; 1 \leq a \leq n-2, 1 \leq i \leq m \text{ และ}$$

$$e_{(n-1)_i} = 0(n-1)_i; 1 \leq i \leq m$$

จากนิยามไลน์กราฟ จะพบว่าจุด 2 จุดใด ๆ จะประชิดกันในไลน์กราฟของไฮเคิลบุคกราฟก็ต่อเมื่อเส้น 2 เส้นนั้นประชิดกันในไฮเคิลบุคกราฟ จากการกำหนดข้างต้นจะพบว่า ทุกคู่ของเส้นที่อยู่ใน $\{e_0\} \cup \{e_{(n-1)_i} | 1 \leq i \leq m\}$ ประชิดกันหมด และทุกคู่ของเส้นที่อยู่ใน $\{e_0\} \cup \{e_{1_i} | 1 \leq i \leq m\}$ ประชิดกันหมดด้วย ทำให้ทุกคู่ของจุดที่อยู่ใน $\{e_0\} \cup \{e_{(n-1)_i} | 1 \leq i \leq m\}$ ประชิดกันใน $L(B_n(m))$ และในทำนองเดียวกันทุกคู่ของจุดที่อยู่ใน $\{e_0\} \cup \{e_{1_i} | 1 \leq i \leq m\}$ ประชิดกันใน $L(B_n(m))$ เช่นเดียวกัน เกิดเป็นคอมพลีทกราฟที่มี $m+1$ จุด (K_{m+1}) จำนวน 2 กราฟ เชื่อมกันที่จุด e_0 ซึ่ง $\chi(K_{m+1}) = m+1$



ภาพที่ 5: : แสดง $E(B_4(2))$, $V(L(B_4(2)))$ และ $\chi(L(B_4(2))) = 3$ ตามลำดับ

ขั้นตอนที่ 1 กำหนดให้ ทุกจุดที่อยู่ใน $\{e_{1_i}, e_{(n-1)_i} | 1 \leq i \leq m\}$ ใส่สี i

ขั้นตอนที่ 2 จุด e_0 ใส่สี $m + 1$

ขั้นตอนที่ 3 เนื่องจากสมาชิกทุกตัวที่อยู่ใน $\{e_0\} \cup \{e_{b_i} | n - 1 > b \in \mathbb{E}^+, 1 \leq i \leq m\}$ ไม่ปะชิดกัน เลย ดังนั้น e_{b_i} สามารถใส่สีเดียวกับ e_0 ได้ ส่งผลให้ e_{b_i} ใส่สี $m + 1 \forall n - 1 > b \in \mathbb{E}^+$ และ $1 \leq i \leq m$

ขั้นตอนสุดท้าย พิจารณาจุดที่อยู่ใน $\{e_{c_i} | c \in \mathbb{O}^+, 1 < c < (n - 1), 1 \leq i \leq m\}$ เนื่องจากทุกจุดที่อยู่ใน $\{e_{1_i}, e_{(n-1)_i} | 1 \leq i \leq m\}$ ใส่สี i ดังนั้นจุด $e_{1_{(i+1)}}$ และ $e_{(n-1)_{(i+1)}}$ ใส่สี $i + 1$ และเมื่อพิจารณา $e_{c_i}; c \in \mathbb{O}^+, 1 < c < (n - 1), 1 \leq i \leq m$ พบว่า e_{c_i} ไม่ปะชิดกับ $e_{1_{(i+1)}}$ และ $e_{(n-1)_{(i+1)}}$ ทำให้เราได้ว่า $e_{c_i}, 1 \leq i \leq m - 1$ สามารถใส่สีเดียวกันกับ $e_{1_{(i+1)}}$ และ $e_{(n-1)_{(i+1)}}$ เพราะฉะนั้น e_{c_i} ใส่สี $i + 1, c \in \mathbb{O}^+, 1 < c < (n - 1), \forall 1 \leq i \leq m - 1$ ในทำนองเดียวกัน เราพบว่า $e_{c_m}; c \in \mathbb{O}^+, 1 < c < (n - 1)$ ไม่ปะชิดกับ e_{1_1} และ $e_{(n-1)_1}$ ส่งผลให้ e_{c_m} สามารถใส่สีเดียวกันกับ e_{1_1} และ $e_{(n-1)_1}$ ได้ นั่นคือ e_{c_m} ใส่สี $1, c \in \mathbb{O}^+, 1 < c < (n - 1)$ จากขั้นตอนการใส่สีทั้งหมด ส่งผลให้ $\chi(L(B_n(m))) = m + 1$

□

ทฤษฎีบท 6 ให้ $3 \leq n \in \mathbb{Z}^+$ และ $0 \leq k \in \mathbb{Z}$ จะได้ว่า

$$\chi(T_{n,k}) = \begin{cases} 2 & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคู่} \\ 3 & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคี่} \end{cases}$$

พิสูจน์ เนื่องจากกราฟลูกฮูด $(T_{n,k})$ คือกราฟที่เกิดจากการเชื่อม C_n และ P_k ด้วยบริดจ์ กำหนดให้

$$V(C_n) = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$$

$$V(P_k) = \{p_1, p_2, p_3, \dots, p_k\} \text{ และบริดจ์คือ } v_1 p_1 \text{ เราสามารถพิจารณาเป็น 2 กรณี}$$

กรณีที่ 1 $k = 0$ แสดงว่า $T_{n,0}$ คือกราฟ C_n เพราะฉะนั้น

$$\chi(T_{n,0}) = \chi(C_n) = \begin{cases} 2 & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคู่} \\ 3 & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคี่} \end{cases}$$

กรณีที่ 2 $k \geq 1$ ขั้นแรก เราจะกำหนดสีให้กับ C_n บทตั้ง 4.1 จะพบว่า

$$\chi(C_n) = \begin{cases} 2 & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคู่} \\ 3 & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคี่} \end{cases}$$

จึงไม่เป็นปัญหาที่เราจะกำหนดให้ v_1 ถูกระบายด้วยสีที่ 1 และเนื่องจาก $v_1 p_1$ เป็นบริดจ์ ดังนั้น p_1 จะต้องใส่สีอื่นที่ไม่ใช่สีที่ 1 เราจึงกำหนดให้ p_1 ถูกระบายด้วยสีที่ 2 ขั้นตอนต่อไป เราจะระบายสีให้กับจุดที่เหลือใน P_k โดย

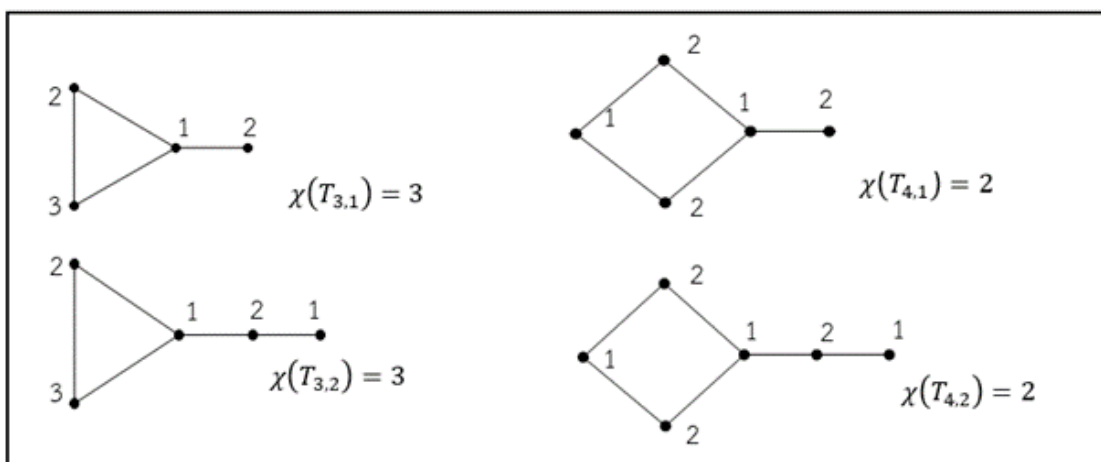
กำหนดให้ P_i ระบายสีที่ 2 เมื่อ i เป็นเลขคี่ และ P_i ระบายสีที่ 1 เมื่อ i เป็นเลขคู่จากขั้นตอนและวิธีการใส่สีข้างต้นจะพบว่า กราฟลูกออด ($T_{n,k}$) มี

$$\chi(C_n) = \begin{cases} 2 & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคู่} \\ 3 & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคี่} \end{cases}$$

□

ทฤษฎีบท 7

$$\chi(L_{p,k}) = \begin{cases} p & \text{เมื่อ } \forall 1 \leq p \in \mathbb{Z}^+, k = 0 \text{ หรือ } 2 \leq p \in \mathbb{Z}^+, 1 \leq k \in \mathbb{Z}^+ \\ 2 & \text{เมื่อ } 1 \leq k \in \mathbb{Z}^+, p = 1 \end{cases}$$



ภาพที่ 6: : แสดงจำนวนโครมาติคของกราฟลูกออด

พิสูจน์

กรณีที่ 1 พิจารณากรณีที่ $\forall 1 \leq p \in \mathbb{Z}^+, k = 0$ หรือ $2 \leq p \in \mathbb{Z}^+, 1 \leq k \in \mathbb{Z}^+$

แบ่งการพิสูจน์ออกเป็น 2 กรณีย่อยได้ดังนี้

กรณีที่ 1.1 $\forall 1 \leq p \in \mathbb{Z}^+, k = 0$

เนื่องจาก $L_{p,0} \cong K_p$ และเราทราบว่า $\chi(K_p) = p, \forall 1 \leq p \in \mathbb{Z}^+$

เพราะฉะนั้น $\chi(L_{p,0}) = \chi(K_p) = p$

กรณีที่ 1.2 $2 \leq p \in \mathbb{Z}^+, 1 \leq k \in \mathbb{Z}^+$

กรณีที่ 1.2.1 $p = 2$ เนื่องจาก $L_{2,k}$ คือกราฟที่ได้จากการเชื่อม K_2 และ P_k ด้วยบริดจ์

ดังนั้น $L_{2,k} \cong P_{k+2}$ จาก $\chi(P_n) = 2$ เพราะฉะนั้น $\chi(L_{2,k}) = \chi(P_{k+2}) = 2$

กรณีที่ 1.2.2 $p > 2$ เนื่องจากกราฟพอยม์ $(L_{p,k})$ คือกราฟที่เกิดจากการเชื่อม K_p และ P_k ด้วยบริดจ์ โดย $2 < p \in \mathbb{Z}^+$ และ $1 \leq k \in \mathbb{Z}$ กำหนดให้ $V(K_p) = k_1, k_2, k_3, \dots, k_p$ และ $V(P_k) = p_1, p_2, p_3, \dots, p_k$ และบริดจ์คือ k_1p_1

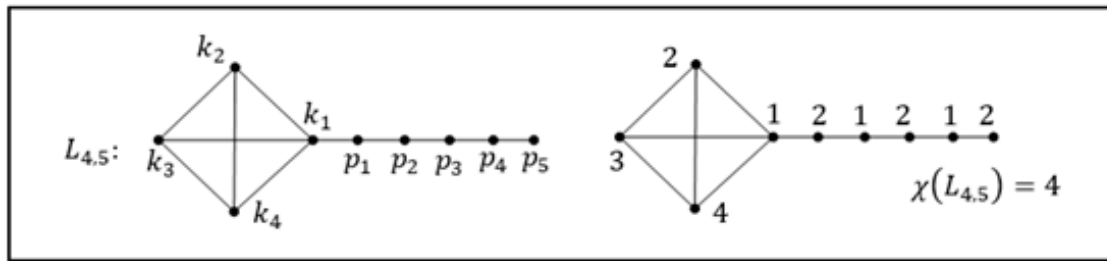
ขั้นแรก เราจะกำหนดสีให้กับ K_p เนื่องจาก $\chi(K_p) = p$ จึงไม่เป็นปัญหาที่เราจะกำหนดให้ k_1 ถูกระบายด้วยสีที่ 1 และเนื่องจาก k_1p_1 เป็นบริดจ์ ดังนั้น p_1 จะต้องใส่สีอื่นที่ไม่ใช่สีที่ 1 เราจึงกำหนดให้ p_1 ถูกระบายด้วยสีที่ 2

ขั้นตอนต่อไป เราจะระบายสีให้กับจุดที่เหลือใน P_k โดยกำหนดให้ P_i ระบายสี 2 เมื่อ i เป็นเลขคี่ และ P_i ระบายสี 1 เมื่อ i เป็นเลขคู่ จากขั้นตอนวิธีการใส่สีข้างต้นจะพบว่า กราฟพอยม์ $(L_{p,k})$ มีจำนวนโครมาติก $\chi(L_{p,k}) = \chi(K_p) = p$

กรณีที่ 2 พิจารณา $1 \leq k \in \mathbb{Z}^+, p = 1$

เนื่องจาก $L_{1,k} \cong P_{k+1}$ และเนื่องจาก $\chi(P_n) = 2 \forall 2 \leq n \in \mathbb{Z}^+$ เพราะฉะนั้น $\chi(L_{1,k}) = \chi(P_{k+1}) = 2$

□



ภาพที่ 7: : แสดง $\chi(L_{p,k}) = p$

สรุปผลการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาการหาจำนวนโครมาติกของไฮเคิลบูคกราฟ แพนกราฟ ปริซึมกราฟ ไส้กราฟของไฮเคิลบูคกราฟ กราฟลูกออด และกราฟมอย้ม ซึ่งการศึกษาครั้งนี้ทำให้ผู้วิจัยได้ทราบว่า

$$\chi(B_n(m)) = \begin{cases} 2 & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคู่} \\ 3 & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคี่} \end{cases}, \chi(F_{m,n}) = 3 \text{ และถ้า } G \text{ เป็น } n\text{-ปริซึมกราฟ แล้ว}$$

$$\chi(G) = n \text{ มากไปกว่านั้น } \chi(L(B_n(1))) = \begin{cases} 2 & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคู่} \\ 3 & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคี่} \end{cases} \text{ และถ้า } 2 \leq m \in \mathbb{Z}^+ \text{ และ}$$

$3 \leq n \in \mathbb{Z}^+$ แล้วจะได้ว่า $\chi(L(B_n(m))) = m + 1$ ส่วนจำนวนโครมาติกของกราฟลูกออดคือ

$$\chi(T_{n,k}) = \begin{cases} 2 & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคู่} \\ 3 & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคี่} \end{cases} \text{ และสุดท้าย จำนวนโครมาติกของกราฟมอย้มคือ}$$

$$\chi(L_{p,k}) = \begin{cases} p & \text{เมื่อ } \forall 1 \leq p \in \mathbb{Z}^+, k = 0 \text{ หรือ } 2 \leq p \in \mathbb{Z}^+, 1 \leq k \in \mathbb{Z}^+ \\ 2 & \text{เมื่อ } 1 \leq k \in \mathbb{Z}^+, p = 1 \end{cases}$$

เอกสารอ้างอิง

- [1] นิตยา ชิงชัย. (2530). ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่.
- [2] นิรุตติ์ พิพรรณจินดา. (2560). ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏกำแพงเพชร.
- [3] นพวิทย์ มหาวงค์ และคณะ. (2561). จำนวนคลิกและจำนวนอิสระของแพนกราฟ (Clique and Independent Number of Fan Graph). (ปริญาตริ). มหาวิทยาลัยราชภัฏเชียงราย. เชียงราย.

- [4] Harary, F. Norman, R. Z. (1960). Some properties of line digraphs. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, vol. 9, no. 2, 161–169.
- [5] Joe Demaio and John Jacobson. (2008). *Electronic Journal of Graph Theory and Applications*, Fibonacci number of the tadpole graph vol. 2, no. 2, 129-138.
- [6] Wolfram MathWorld. (n.d.). Lollipop Graph. <https://mathworld.wolfram.com/LollipopGraph.html>