

สมบัติการหารลงตัวด้วย k ของผลบวกของจำนวนฟีโบนัชชีดัดแปลง เมื่อ $k = 2, 3, 4, 5$

วาเรียน ชัยจันทร์¹, ธีรเดช เกี้ยววงศ์¹, กิตติกวิน สีสอาด¹ และสุทธิวัฒน์ ทองนาค^{1*}

¹ หลักสูตรคณิตศาสตร์และการจัดการข้อมูล คณะวิทยาศาสตร์และนวัตกรรมดิจิทัล มหาวิทยาลัยทักษิณ

บทคัดย่อ

ในงานวิจัยนี้เราศึกษาสมบัติการหารลงตัวของผลบวกของจำนวนฟีโบนัชชีดัดแปลง V_n ที่กำหนดโดยความสัมพันธ์เวียนเกิด $V_n = V_{n-1} + 2V_{n-2}$ สำหรับ $n \in \mathbb{N}$ โดยมีค่าเริ่มต้นคือ $V_0 = 2$ และ $V_1 = 2$ โดยการหารจำนวนฟีโบนัชชีดัดแปลงด้วย $k = 2, 3, 4, 5$ พบว่าเศษเหลือที่ได้จากการหารซ้ำกันเป็นชุด นำไปสู่การค้นพบสมบัติการหารลงตัวของผลบวกจำนวนฟีโบนัชชีดัดแปลงจำนวนสี่ข้อซึ่งแต่ละข้อสามารถแสดงการพิสูจน์ได้โดยใช้หลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์แบบเข้ม

คำสำคัญ: จำนวนฟีโบนัชชีดัดแปลง หลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์แบบเข้ม โมดูลо การหารลงตัว

* ผู้รับผิดชอบบทความ : tsutthiwat@tsu.ac.th

Divisibility by k of the Sum of Modified Fibonacci Numbers for $k = 2,3,4,5$

Wariam Chuayjan¹, Theeradach Kaewong¹, Kittikawin Sisaart¹ and Sutthiwat Thongnak^{1*}

¹ Mathematics and Data Management Program, Faculty of Science and Digital Innovation, Thaksin University

Abstract

This work aims to investigate the divisibility properties of the sum of modified Fibonacci sequence V_n , defined by the recurrence relation $V_n = V_{n-1} + 2V_{n-2}$ for $n \in \mathbb{N}$, with initial values $V_0 = 2$ and $V_1 = 2$. By examining the sequence modulo $k = 2,3,4,5$, we observe that the remainders form repeating patterns, which lead to discover four divisibility properties of the sum of the modified Fibonacci numbers, which can be proven using strong mathematical induction.

Keywords: Modified Fibonacci Number, Strong Mathematical Induction, Modulo, Divisibility

* Corresponding author: tsutthiwat@tsu.ac.th

1. บทนำ

จำนวนฟีโบนัชชีเป็นลำดับจำนวนที่นักคณิตศาสตร์หลายคนรู้จักกันดีและมีการศึกษาอย่างกว้างขวาง นิยามของจำนวนฟีโบนัชชีในรูปความสัมพันธ์เวียนเกิดคือ $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ เมื่อ $F_0 = 0$ และ $F_1 = 1$ โดย $n = 2, 3, 4, \dots$ (Koshy, 2001) ในเวลาต่อมา มีนักคณิตศาสตร์ให้นิยามของจำนวนฟีโบนัชชีทั่วไปในรูปความสัมพันธ์เวียนเกิดดังนี้

$$F_n = aF_{n-1} + bF_{n-2} \quad (1)$$

เมื่อ $F_0 = 0$ และ $F_1 = 1$ สำหรับ n เป็นจำนวนนับที่มากกว่าหนึ่ง (Singh et al., 2014) และมีนักคณิตศาสตร์ศึกษาจนมีทฤษฎีที่เกี่ยวข้องมากมาย เช่น Lang และ Lang (2013), Dhanya et al. (2021) ในปี 2021 มีนักคณิตศาสตร์ศึกษาสมบัติการหารลงตัวของจำนวนไตรโบนัชชี-ลูคัส โดยพิจารณาเศษจากการหารจำนวนไตรโบนัชชี-ลูคัส ด้วยจำนวนเต็มบวกซึ่งทำให้พบสมบัติการหารลงตัวหลายสมบัติ (มนตรี สามแปง และคณะ, 2021) ในงานวิจัยนี้ผู้วิจัยได้เลือกนิยามของจำนวนฟีโบนัชชีทั่วไปจาก (1) โดยจะกำหนด $a = 1$ และ $b = 2$ เรียกว่าจำนวนฟีโบนัชชีดัดแปลง (Modified Fibonacci Number) โดยให้แทนด้วยสัญลักษณ์ V_n เมื่อ $n \in \mathbb{N}$ และเขียนในรูปความสัมพันธ์เวียนเกิดได้เป็น $V_n = V_{n-1} + 2V_{n-2}$ เมื่อ $V_0 = 2$ และ $V_1 = 2$ เพื่อพิจารณาสมบัติการหารลงตัวและแสดงการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์

2. วัตถุประสงค์การวิจัย

2.1 เพื่อหาสมบัติการหารลงตัวของผลรวมจำนวนฟีโบนัชชีดัดแปลง

2.2 พิสูจน์สมบัติที่ได้จากข้อ 2.1

3. วิธีดำเนินการวิจัย

งานวิจัยนี้เป็นงานวิจัยเชิงทฤษฎีในสาขาคณิตศาสตร์ โดยเริ่มต้นจากการศึกษาวรรณกรรมและทฤษฎีทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับจำนวนฟีโบนัชชีดัดแปลง ความสัมพันธ์เวียนเกิด และขั้นตอนวิธีการหาร จากนั้นจึงกำหนดนิยามและสัญลักษณ์ที่จำเป็นอย่างชัดเจนและเป็นระบบโดยนิยามจำนวนฟีโบนัชชีดัดแปลงจากความสัมพันธ์เวียนเกิดดังต่อไปนี้ความรู้ที่จำเป็นในงานวิจัย

3.1 ความรู้เบื้องต้น

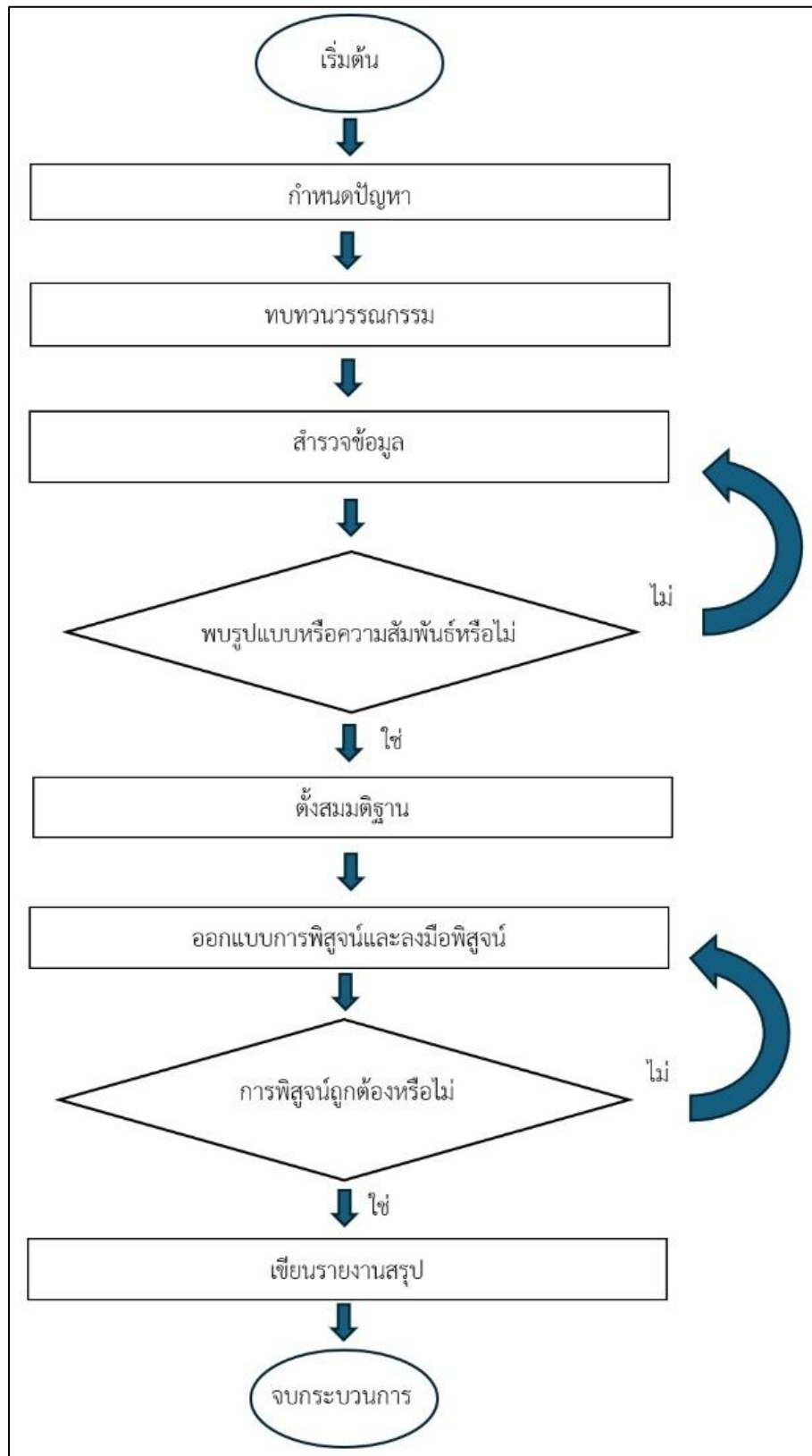
บทนิยาม จำนวนฟีโบนัชชีดัดแปลง กำหนดให้ V_n แทนจำนวนฟีโบนัชชีดัดแปลง โดย $n \in \mathbb{N}$ และ $n \geq 2$ ซึ่งกำหนดโดย

$$V_n = V_{n-1} + 2V_{n-2} \text{ เมื่อ } V_0 = 2 \text{ และ } V_1 = 2$$

ลำดับของจำนวนฟีโบนัชชีดัดแปลงเป็นดังนี้ 2,2,6,10,22,42, ...

3.2 ขั้นตอนดำเนินการวิจัย

ในการวิจัยนี้มีกระบวนการในแต่ละขั้นตอนเป็นไปตามภาพที่ 1 โดยเริ่มจากขั้นตอนแรกคือ การกำหนดปัญหาซึ่งผู้วิจัยต้องการศึกษาสมบัติการหารลงตัวของจำนวนฟีโบนัชชีดัดแปลง จากนั้นจึงทบทวนวรรณกรรมโดยจะค้นคว้าหาความรู้เกี่ยวกับขั้นตอนวิธีการหาร และวิธีการสมภาค ทำการสำรวจความเป็นไปได้โดยการนำจำนวนเต็ม ไปหารจำนวนฟีโบนัชชีดัดแปลงและพิจารณาเศษที่ได้จากการหาร สังเกตความสัมพันธ์ที่จะทำให้ได้สมบัติการหารลงตัวของผลบวกของจำนวนฟีโบนัชชีดัดแปลงจากนั้นจึงใช้เหตุผลเชิงตรรกะและผลลัพธ์ทางคณิตศาสตร์ที่มีอยู่เดิมตั้งสมมติฐานขึ้น และดำเนินการพิสูจน์ทฤษฎีเหล่านั้นอย่างเข้มงวด โดยใช้หลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ และท้ายที่สุดคือการนำผลที่ได้ไปเขียนรายงานผล



ภาพที่ 1 ขั้นตอนในการทำวิจัยเรื่อง สมบัติการหารลงตัวด้วย k ของผลบวกของจำนวนฟีโบนัชชีตัดแปลงเมื่อ $k = 2,3,4,5$

4. ผลการวิจัย

ในการวิจัยนี้เริ่มจากการนำจำนวน $k = 2, 3, 4, 5$ ไปหารจำนวนฟีโบนัชชีที่ดัดแปลง แสดงได้ดังตารางที่ 1

ตารางที่ 1 แสดงเศษที่จากการหารจำนวนฟีโบนัชชีที่ดัดแปลงด้วย $k = 2, 3, 4, 5$

n	V_n	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$
0	2	0	2	2	2
1	2	0	2	2	2
2	6	0	0	2	1
3	10	0	1	2	0
4	22	0	1	2	2
5	42	0	0	2	2
6	86	0	2	2	1
7	170	0	2	2	0
8	342	0	0	2	2
9	682	0	1	2	2
10	1,366	0	1	2	1
11	2,730	0	0	2	0
12	5,462	0	2	2	2
13	10,922	0	2	2	2
14	21,846	0	0	2	1
15	43,690	0	1	2	0
16	87,382	0	1	2	2
17	174,762	0	0	2	2
18	349,526	0	2	2	1
19	699,050	0	2	2	0
20	1,398,102	0	0	2	2

จากตารางที่ 1 พบว่า เมื่อนำจำนวนเต็มบวก k เมื่อ $2 \leq k \leq 5$ หารแต่ละพจน์ของจำนวนฟีโบนัชชีที่ดัดแปลง แล้วจะมีเศษเหลือจากการหารซ้ำกันเป็นชุด ๆ ได้แก่

สำหรับการหารด้วย 2 จะได้ชุดเศษเหลือซ้ำกันชุดละ 1 พจน์ คือ (0)

สำหรับการหารด้วย 3 จะได้ชุดเศษเหลือซ้ำกันชุดละ 6 พจน์ คือ (2,2,0,1,1,0)

สำหรับการหารด้วย 4 จะได้ชุดเศษเหลือซ้ำกันชุดละ 1 พจน์ คือ (2)

สำหรับการหารด้วย 5 จะได้ชุดเศษเหลือซ้ำกันชุดละ 4 พจน์ คือ (2,2,1,0)

เมื่อนำจำนวนฟีโบนัชชีที่ดัดแปลงที่หารด้วย k ค่าเดียวกันมาจัดเรียงเป็นแถวตามจำนวนพจน์ของชุดเศษเหลือที่ซ้ำกันและนำจำนวนฟีโบนัชชีที่ดัดแปลงที่มีเศษเท่ากันและตรงกันในแต่ละชุดมาบวกกันทีละ k พจน์ จะได้ว่า k หารผลบวกนั้นลงตัว ยกตัวอย่างเช่น ในกรณี $k = 3$ จะได้ผลเป็นดังแสดงในตารางที่ 2

ตารางที่ 2 จำนวนฟีโบนัชชีสามตัวติดกันที่มีเศษเท่ากันในแต่ละกลุ่ม เมื่อ $k = 3$

Modulo 3	พจน์ที่ตรงกันในแต่ละชุด		
2	$V_0 = 2$	$V_6 = 86$	$V_{12} = 5,462$
2	$V_1 = 2$	$V_7 = 170$	$V_{13} = 10,922$
0	$V_2 = 6$	$V_8 = 342$	$V_{14} = 21,846$
1	$V_3 = 10$	$V_9 = 682$	$V_{15} = 43,690$
1	$V_4 = 22$	$V_{10} = 1,366$	$V_{16} = 87,382$
0	$V_5 = 12$	$V_{11} = 2,730$	$V_{17} = 174,762$

จากตารางที่ 2 จะเห็นว่า $V_0 + V_6 + V_{12} = 2 + 86 + 5,462 = 5,550$ ซึ่ง $5,550 \equiv 0(mod 3)$ และ $V_1 + V_7 + V_{13} = 2 + 170 + 10,922 = 11,094$ ซึ่ง $11,094 \equiv 0(mod 3)$ เป็นต้น ในการศึกษาสำหรับ $k = 2, 3, 4, 5$ จะเริ่มจากกรณีที่ $k = 2$ เนื่องจาก $V_0 = V_1 = 2$ และ เห็นได้ชัดว่า V_n เป็นจำนวนคู่เพราะเกิดจากผลบวกของจำนวนคู่ ทำให้สรุปได้ว่า $V_n \equiv 0(mod 2)$ ต่อไปจะพิจารณากรณีที่ $k = 3, 4, 5$ ดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 1 สำหรับ $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ถ้า V_n เป็นจำนวนฟีโบนัชชีที่ดัดแปลง แล้ว

$$V_n \equiv 2(mod 4) \quad (2)$$

การพิสูจน์ จะเห็นได้ว่า $V_0 = V_1 = 2 \equiv 2(mod 4)$ ต่อไปจะพิสูจน์โดยการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ กำหนดให้ $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

กำหนดให้ $P(n)$ แทน “ $V_n \equiv 2(mod 4)$ ”

ขั้นที่ 1 เนื่องจาก $V_2 = 6 \equiv 2(mod 4)$ ดังนั้น $P(2)$ เป็นจริง

ขั้นที่ 2 ให้ $P(2), P(3), \dots, P(k)$ เป็นจริง สำหรับทุก $k \geq 2$ ดังนั้น $V_m \equiv 2(mod 4)$ สำหรับทุก m ที่ $2 \leq m \leq k$

พิจารณา $V_{k+1} = V_k + 2V_{k-1}$ เมื่อ $k = 2$ จะได้ $V_3 = V_2 + 2V_1 = 6 + 4 = 10 \equiv 2(mod 4)$

ดังนั้น $V_3 \equiv 2(mod 4)$ และถ้า $k \geq 3$ จะได้ $V_{k+1} \equiv (V_k + 2V_{k-1})(mod 4)$

$$\equiv V_k(mod 4) + 2(V_{k-1}(mod 4))$$

$$\equiv 2(mod 4) + 4(mod 4)$$

$$\equiv 2(mod 4)$$

นั่นคือ $p(k + 1)$ เป็นจริง

ทฤษฎีบทที่ 2 สำหรับ $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ถ้า V_n เป็นจำนวนฟีโบนัชชีที่ดัดแปลง แล้ว

$$V_n + V_{n+6} + V_{n+12} \equiv 0(mod 3) \quad (3)$$

การพิสูจน์ กำหนดให้ $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ กำหนดให้ $P(n)$ แทน “ $V_n + V_{n+6} + V_{n+12} \equiv 0(mod 3)$ ”

ขั้นที่ 1 จาก $V_0 + V_6 + V_{12} = 2 + 86 + 5,462 = 5,550 = 3(1,850)$ จะได้ $V_0 + V_6 + V_{12} \equiv 0(mod 3)$ ดังนั้น $P(0)$ เป็นจริง

ขั้นที่ 2 ให้ $0 \leq m \leq k + 1$ ถ้า $P(m)$ เป็นจริง กล่าวคือ $P(k)$ และ $P(k + 1)$ เป็นจริง

จะได้ $V_k + V_{k+6} + V_{k+12} \equiv 0(mod 3)$ และ $V_{k+1} + V_{k+7} + V_{k+13} \equiv 0(mod 3)$ ตามลำดับ

จะต้องแสดงว่า $P(k+2)$ เป็นจริง ซึ่งก็คือ $V_{k+2} + V_{(k+2)+6} + V_{(k+2)+12} \equiv 0(mod 3)$

เริ่มพิจารณาจาก

$$\begin{aligned} V_{k+2} + V_{k+8} + V_{k+14} &= V_{k+1} + 2V_k + V_{k+7} + 2V_{k+6} + V_{k+13} + 2V_{k+12} \\ &= V_{k+1} + V_{k+7} + V_{k+13} + 2(V_k + V_{k+6} + V_{k+12}) \end{aligned}$$

ทำให้ $V_{k+2} + V_{(k+2)+6} + V_{(k+2)+12} \equiv 0(mod 3)$ ดังนั้น $P(k+2)$ เป็นจริง

ทฤษฎีบทที่ 3 สำหรับ $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ถ้า V_n เป็นจำนวนฟีโบนัชชีติดแปลง แล้ว

$$V_n + V_{n+1} + V_{n+2} + V_{n+3} \equiv 0(mod 4) \quad (4)$$

การพิสูจน์ กำหนดให้ $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ จากทฤษฎีบทที่ 1 จะได้ $V_{n+k} \equiv 2(mod 4)$ สำหรับทุก $k \in \{0,1,2,3\}$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น} \quad V_n + V_{n+1} + V_{n+2} + V_{n+3} &\equiv 2(mod 4) + 2(mod 4) + 2(mod 4) + 2(mod 4) \\ &\equiv 8(mod 4) \\ &\equiv 0(mod 4) \end{aligned}$$

ทฤษฎีบทที่ 4 สำหรับ $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ถ้า V_n เป็นจำนวนฟีโบนัชชีติดแปลง แล้ว

$$V_n + V_{n+4} + V_{n+8} + V_{n+12} + V_{n+16} \equiv 0(mod 5) \quad (5)$$

การพิสูจน์ กำหนดให้ $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ให้ $P(n)$ แทน “ $V_n + V_{n+4} + V_{n+8} + V_{n+12} + V_{n+16} \equiv 0(mod 5)$ ”

ขั้นที่ 1 จะแสดงว่า $P(0)$ เป็นจริง จะเห็นว่า $V_0 + V_4 + V_8 + V_{12} + V_{16} = 93,210 \equiv 0(mod 5)$ ดังนั้น $P(0)$ เป็นจริง

ขั้นที่ 2 ให้ $0 \leq m \leq k+1$ ถ้า $P(m)$ เป็นจริง กล่าวคือ $P(k)$ และ $P(k+1)$ เป็นจริง

กล่าวคือ $V_k + V_{k+4} + V_{k+8} + V_{k+12} + V_{k+16} \equiv 0(mod 5)$ และ

$V_{k+1} + V_{k+5} + V_{k+9} + V_{k+13} + V_{k+17} \equiv 0(mod 5)$ ตามลำดับ จะต้องแสดงว่า $P(k+2)$ เป็นจริง

โดยเริ่มพิจารณาจาก

$$\begin{aligned} V_{k+2} + V_{k+6} + V_{k+10} + V_{k+14} + V_{k+18} &= V_{k+1} + V_{k+5} + V_{k+9} + V_{k+13} + V_{k+17} + 2(V_k + V_{k+4} + V_{k+8} + V_{k+12} + V_{k+16}) \\ \text{จะได้ } V_{k+2} + V_{(k+2)+4} + V_{(k+2)+8} + V_{(k+2)+12} + V_{(k+2)+16} &\equiv 0(mod 5) \text{ ดังนั้น } P(k+2) \text{ เป็นจริง} \end{aligned}$$

5. อภิปรายผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

งานวิจัยนี้ใช้ขั้นตอนวิธีการหาทำให้พบสมบัติการหารลงตัวด้วยของจำนวนฟีโบนัชชีติดแปลง ซึ่งพบว่าเศษที่ได้จากการหารจะซ้ำกันเป็นชุด และเมื่อพิจารณาจากหลักการหารสามารถจัดพจน์เพื่อให้เกิดการหารลงตัวด้วย นำไปสู่สมบัติการหารลงตัวจากผลบวกจำนวนฟีโบนัชชีติดแปลง ทำให้ได้ทฤษฎีบท ดังนี้

สำหรับ $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ถ้า V_n เป็นจำนวนฟีโบนัชชีติดแปลงเมื่อ $V_0 = 2$ และ $V_1 = 2$ แล้ว

1. $V_n \equiv 2(mod 4)$
2. $V_n + V_{n+6} + V_{n+12} \equiv 0(mod 3)$
3. $V_n + V_{n+1} + V_{n+2} + V_{n+3} \equiv 0(mod 4)$
4. $V_n + V_n + V_{n+4} + V_{n+8} + V_{n+12} + V_{n+16} \equiv 0(mod 5)$

ซึ่งสามารถแสดงได้ว่าเป็นจริง โดยการพิสูจน์โดยใช้หลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์แบบเข้ม

6. กิตติกรรมประกาศ

ขอขอบคุณ คณะวิทยาศาสตร์และนวัตกรรมการศึกษา มหาวิทยาลัยทักษิณ วิทยาเขตพัทลุง ที่เอื้อเฟื้อสถานที่และอำนวยความสะดวกในการทำงานวิจัยครั้งนี้จนสำเร็จลุล่วงด้วยดี

7. เอกสารอ้างอิง

มนตรี สามแปง, ปวีณา ก้อนคำ, และจุฑามาส สุขแยง. (2564). สมบัติบางประการของลำดับไตรโบนักซี-ลูคัสที่เกี่ยวข้องกับโมดูล.

รายงานสืบเนื่องจากการประชุมวิชาการระดับชาติ ราชภัฏสุราษฎร์ธานีวิจัย ครั้งที่ 16. (น. 417-424). มหาวิทยาลัยราชภัฏสุราษฎร์ธานี

Cheng, L. L., & Lang, M. L. (2013). Fibonacci numbers and identities. *The Fibonacci Quarterly*, 51(4), 330-338.

<https://doi.org/10.1080/00150517.2013.12427932>

Dhanya, P., Nagaraja, K. M., & Reddy, P. S. K. (2021). A note on D'Ocagne's identity on generalized Fibonacci and Lucas numbers. *Palestine Journal of Mathematics*, 10(2), 751-755. <https://pjm.ppu.edu/paper/878-note-d%E2%80%99ocagne%E2%80%99s-identity-generalized-fibonacci-and-lucas-numbers>

Koshy, T. (2001). *Fibonacci and Lucas numbers with applications*. Wiley-Interscience.

<https://doi.org/10.1002/9781118033067>

Singh, B., Gupta, V. K., & Yashwant, K. (2014). Generalized Fibonacci sequences and its properties. *Palestine Journal of Mathematics*, 3(1), 141-147. https://pjm.ppu.edu/vol_3_1/15.pdf