

ผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $2^x - 15^y = z^2$ และ $3^x - 15^y = z^2$

On the Solutions of the Diophantine Equations $2^x - 15^y = z^2$ and $3^x - 15^y = z^2$

สุธน ตาดิ^{1*}

Suton Tadee^{1*}

¹ สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเทพสตรี

¹ Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Thepsatri Rajabhat University

บทคัดย่อ

ในงานวิจัยนี้ได้ศึกษาหาผลเฉลยทั้งหมดของสมการไดโอแฟนไทน์ $2^x - 15^y = z^2$ และ $3^x - 15^y = z^2$ เมื่อ x, y และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ โดยใช้ความรู้พื้นฐานของสมภาคและทฤษฎีบทของมิไฮเลสคู ผลการวิจัย พบว่า สมการไดโอแฟนไทน์ $2^x - 15^y = z^2$ มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ (x, y, z) สี่ผลเฉลย คือ $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 1)$, $(4, 1, 1)$ และ $(6, 1, 7)$ และสมการไดโอแฟนไทน์ $3^x - 15^y = z^2$ มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ (x, y, z) เพียงผลเฉลยเดียว คือ $(0, 0, 0)$

คำสำคัญ: สมการไดโอแฟนไทน์ สมภาค ทฤษฎีบทของมิไฮเลสคู

Abstract

In this paper, we find all solutions of the Diophantine equations $2^x - 15^y = z^2$ and $3^x - 15^y = z^2$, where x, y and z are non-negative integers. By using the elementary concepts of congruence and Mihăilescu's Theorem, we show that the Diophantine equation $2^x - 15^y = z^2$ has four non-negative integer solutions (x, y, z) , which are $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 1)$, $(4, 1, 1)$ and $(6, 1, 7)$. The Diophantine equation $3^x - 15^y = z^2$ has exactly one non-negative integer solution (x, y, z) . That is $(0, 0, 0)$.

Keywords: Diophantine equation, Congruence, Mihăilescu's Theorem

* Corresponding author: suton.t@lawasri.tru.ac.th

1. บทนำ

สมการไดโอแฟนไทน์ (Diophantine equation) เป็นอีกหนึ่งสมการสำคัญในทฤษฎีจำนวน (Number Theory) ที่ได้รับความสนใจอย่างกว้างขวาง ซึ่งสมการไดโอแฟนไทน์นั้นคือสมการที่พิจารณาเฉพาะผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มเท่านั้น และด้วยประโยชน์ของสมการไดโอแฟนไทน์ที่นำไปใช้แก้ปัญหาต่างๆ เช่น การแก้ปัญหาทางธุรกิจ (Problem on business) และการดุลสมการเคมี (Balancing chemical equation) เป็นต้น (Kaur & Sambhor, 2017) จึงทำให้มีผู้สนใจศึกษาสมการไดโอแฟนไทน์เป็นจำนวนมาก และในหนึ่งทศวรรษที่ผ่านมา มีนักคณิตศาสตร์ได้ศึกษาและค้นหาผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ (x, y, z) ของสมการไดโอแฟนไทน์ที่อยู่ในรูป $a^x - b^y = z^2$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนเต็มบวก โดยในที่นี้จะขอยกตัวอย่างผลงานวิจัย เช่น

ในปี ค.ศ. 2019 Thongnak et al. (2019) ได้พิสูจน์ว่า $(x, y, z) \in \{(0, 0, 0), (1, 0, 1), (2, 1, 1)\}$ เป็นผลเฉลยทั้งหมดของสมการ $2^x - 3^y = z^2$ และต่อมาในปี ค.ศ. 2022 Thongnak et al. (2022) ได้ค้นพบว่าสมการ $7^x - 2^y = z^2$ มีเพียงผลเฉลยเดียว คือ $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ และ Rao (2022) ได้แสดงว่าสมการ $23^x - 19^y = z^2$ มีเพียงสองผลเฉลย คือ $(x, y, z) \in \{(0, 0, 0), (1, 1, 2)\}$

ในปี ค.ศ. 2023 Chuayjan et al. (2023a) ได้ค้นพบว่า $(x, y, z) \in \{(0, 0, 0), (1, 0, 3)\}$ เป็นผลเฉลยทั้งหมดของสมการ $10^x - 17^y = z^2$ และในขณะเดียวกัน Kaewong et al. (2023) ได้ศึกษาและแสดงว่าสมการ $29^x - 3^y = z^2$ มีเพียงผลเฉลยเดียว คือ $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ และ Tadee (2023) ได้ค้นพบว่าสมการ $9^x - 3^y = z^2$ มีผลเฉลย คือ $(x, y, z) \in \{(r, 2r, 0)\}$ เมื่อ r เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ และสมการ $13^x - 7^y = z^2$ มีผลเฉลยเดียว คือ $(x, y, z) = (0, 0, 0)$

นอกจากนี้ Gope (2023) ได้พิสูจน์ว่าสมการ $27^x - 11^y = z^2$ มีสองผลเฉลย คือ $(x, y, z) \in \{(0, 0, 0), (1, 1, 4)\}$ และเมื่อไม่นานมานี้ Siraworakun & Tadee (2024) ได้พิสูจน์ว่า $(x, y, z) \in \{(0, 0, 0), (2, 2, 24)\}$ เป็นผลเฉลยทั้งหมดของสมการ $25^x - 7^y = z^2$

จากการศึกษาวิจัยดังกล่าวข้างต้น ทำให้ผู้วิจัยสนใจหาผลเฉลยของสมการในรูปแบบอื่น กล่าวคือ $2^x - 15^y = z^2$ และ $3^x - 15^y = z^2$ เมื่อ x, y และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

2. วัตถุประสงค์การวิจัย

เพื่อศึกษาหาผลเฉลยทั้งหมดของสมการไดโอแฟนไทน์ $2^x - 15^y = z^2$ และ $3^x - 15^y = z^2$ เมื่อ x, y และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

3. วิธีดำเนินการวิจัย

บทนิยามและสมบัติเบื้องต้นของสมภาค (Congruence) ดังนี้

บทนิยาม 1 (Burton, 2010, p. 63) ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก จะกล่าวว่า สองจำนวนเต็ม a และ b สมภาค หรือ คอนกรูเอนซ์ มอดุโล n เขียนแทนด้วย $a \equiv b \pmod{n}$ เมื่อ n หาร $a - b$ ลงตัว

ทฤษฎีบท 1 (Burton, 2010, p. 65) ให้ $n > 1$ และ a, b, c, d เป็นจำนวนเต็ม จะได้ว่า

- 1) $a \equiv a \pmod{n}$
- 2) ถ้า $a \equiv b \pmod{n}$ แล้ว $b \equiv a \pmod{n}$
- 3) ถ้า $a \equiv b \pmod{n}$ และ $b \equiv c \pmod{n}$ แล้ว $a \equiv c \pmod{n}$
- 4) ถ้า $a \equiv b \pmod{n}$ และ $c \equiv d \pmod{n}$ แล้ว $a + b \equiv c + d \pmod{n}$ และ $ab \equiv cd \pmod{n}$
- 5) ถ้า $a \equiv b \pmod{n}$ แล้ว $a + c \equiv b + c \pmod{n}$ และ $ac \equiv bc \pmod{n}$
- 6) ถ้า $a \equiv b \pmod{n}$ แล้ว $a^k \equiv b^k \pmod{n}$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มบวก

ทฤษฎีบท 2 ถ้า y เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ แล้ว $3^y + 5^y \equiv 2, 8 \pmod{16}$

พิสูจน์

เนื่องจาก y เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ดังนั้นโดยขั้นตอนวิธีการหาร (The division algorithm) จะได้ว่า มีจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ h และ r ซึ่งทำให้ $y = 4h + r$ โดยที่ $r \in \{0, 1, 2, 3\}$

กรณีที่ 1: $r = 0$ จะได้ว่า $3^y + 5^y \equiv 3^{4h} + 5^{4h} \equiv 1^h + 1^h \equiv 2 \pmod{16}$

กรณีที่ 2: $r = 1$ จะได้ว่า $3^y + 5^y \equiv 3^{4h+1} + 5^{4h+1} \equiv 3 \cdot 1^h + 5 \cdot 1^h \equiv 8 \pmod{16}$

กรณีที่ 3: $r = 2$ จะได้ว่า $3^y + 5^y \equiv 3^{4h+2} + 5^{4h+2} \equiv 3^2 \cdot 1^h + 5^2 \cdot 1^h \equiv 34 \equiv 2 \pmod{16}$

กรณีที่ 4: $r = 3$ จะได้ว่า $3^y + 5^y \equiv 3^{4h+3} + 5^{4h+3} \equiv 3^3 \cdot 1^h + 5^3 \cdot 1^h \equiv 152 \equiv 8 \pmod{16}$

ดังนั้นจากทั้งสี่กรณีสรุปได้ว่า $3^y + 5^y \equiv 2, 8 \pmod{16}$

นอกจากนี้จะขอเสนอสองทฤษฎีบทที่สำคัญที่จะนำไปใช้หาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ กล่าวคือ

ทฤษฎีบท 3 (Mihăilescu's Theorem) (Mihăilescu, 2004) สมการไดโอแฟนไทน์ $a^x - b^y = 1$, เมื่อ a, b, x และ y เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ $\min\{a, b, x, y\} > 1$ มีผลเฉลยเพียงผลเฉลยเดียว คือ $(a, b, x, y) = (3, 2, 2, 3)$

ทฤษฎีบท 4 (Chuayjan et al., 2023b) สมการไดโอแฟนไทน์ $3^x - 5^y = z^2$ มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ (x, y, z) สองผลเฉลย คือ $(0, 0, 0)$ และ $(2, 1, 2)$

4. ผลการวิจัย

ในหัวข้อนี้จะแสดงผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบของสมการไดโอแฟนไทน์ $2^x - 15^y = z^2$ และ $3^x - 15^y = z^2$ ตามลำดับ

ทฤษฎีบท 5 สมการไดโอแฟนไทน์ $2^x - 15^y = z^2$ มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ (x, y, z) สี่ผลเฉลย คือ $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 1)$, $(4, 1, 1)$ และ $(6, 1, 7)$

พิสูจน์ ให้ x, y และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ซึ่งทำให้

$$2^x - 15^y = z^2 \quad (1)$$

กรณีที่ 1: $y = 0$ จากสมการ (1) จะได้ว่า $2^x - 1 = z^2$ หรือ $2^x - z^2 = 1$

กรณีที่ 1.1: $x = 0$ จะได้ว่า $z^2 = 0$ ดังนั้น $z = 0$ นั่นคือ $(x, y, z) = (0, 0, 0)$

กรณีที่ 1.2: $x = 1$ จะได้ว่า $z^2 = 1$ ดังนั้น $z = 1$ นั่นคือ $(x, y, z) = (1, 0, 1)$

กรณีที่ 1.3: $x > 1$ จะได้ว่า $z^2 > 1$ ดังนั้น $z > 1$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เนื่องจากทฤษฎีบท 3

กรณีที่ 2: $y > 0$ ดังนั้น $15^y \equiv 0 \pmod{3}$ และจากสมการ (1) จะได้ว่า $z^2 \equiv (-1)^x - 0 \equiv (-1)^x \pmod{3}$ สมมติว่า x เป็นจำนวนคี่ ดังนั้น $z^2 \equiv -1 \equiv 2 \pmod{3}$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เพราะฉะนั้น x เป็นจำนวนคู่

ดังนั้นจะมีจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ k ซึ่งทำให้ $x = 2k$ และจากสมการ (1) จะได้ว่า

$$(2^k - z)(2^k + z) = 3^y \cdot 5^y \quad (2)$$

ดังนั้นจะมีจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ u และ v ซึ่งทำให้

$$2^k - z = 3^u \cdot 5^v \quad (3)$$

$$\text{และ} \quad 2^k + z = 3^{y-u} \cdot 5^{y-v} \quad (4)$$

จากสมการ (3) และ สมการ (4) จะได้ว่า

$$2^{k+1} = 3^u \cdot 5^v + 3^{y-u} \cdot 5^{y-v} \quad (5)$$

กรณีที่ 2.1: $u = 0$ จากสมการ (5) จะได้ว่า

$$2^{k+1} = 5^v + 3^y \cdot 5^{y-v} \quad (6)$$

กรณีที 2.1.1: $v = 0$ จากสมการ (6) จะได้ว่า $2^{k+1} = 1 + 15^y$ หรือ $2^{k+1} - 15^y = 1$ และเนื่องจากทฤษฎีบท 3 จะได้ว่า $y = 1$ ดังนั้น $2^{k+1} = 16$ เพราะฉะนั้น $k = 3$ ทำให้ $x = 6$ และจากสมการ (1) จะได้ว่า $z = 7$ นั่นคือ $(x, y, z) = (6, 1, 7)$

กรณีที 2.1.2: $y - v = 0$ ดังนั้น $y = v$ และจากสมการ (6) จะได้ว่า

$$2^{k+1} = 5^y + 3^y \quad (7)$$

ถ้า $k = 0$ จากสมการ (7) จะได้ว่า $2 = 5^y + 3^y$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เนื่องจาก $y > 0$

ถ้า $k = 1$ จากสมการ (7) จะได้ว่า $4 = 5^y + 3^y$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เนื่องจาก $y > 0$

ถ้า $k = 2$ ดังนั้น $x = 4$ และจากสมการ (7) จะได้ว่า $8 = 5^y + 3^y$ ดังนั้น $y = 1$ และจากสมการ (1) จะได้ว่า $z = 1$ นั่นคือ $(x, y, z) = (4, 1, 1)$

ถ้า $k > 2$ ดังนั้น $2^{k+1} \equiv 0 \pmod{16}$ และจากสมการ (7) จะได้ว่า $5^y + 3^y \equiv 0 \pmod{16}$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เนื่องจากทฤษฎีบท 2

กรณีที 2.1.3: $v > 0$ และ $y - v > 0$ ดังนั้น $5|(5^y + 3^y \cdot 5^{y-v})$ จากสมการ (6) จะได้ว่า $5|(2^{k+1})$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้

กรณีที 2.2: $y - u = 0$ ดังนั้น $y = u$ และจากสมการ (5) จะได้ว่า

$$2^{k+1} = 3^y \cdot 5^v + 5^{y-v} \quad (8)$$

พิสูจน์ในทำนองเดียวกับกรณีที 2.1 จะได้ว่า $(x, y, z) = (6, 1, 7)$ และ $(x, y, z) = (4, 1, 1)$

กรณีที 2.3: $u > 0$ และ $y - u > 0$ ดังนั้น $3|(3^u \cdot 5^v + 3^{y-u} \cdot 5^{y-v})$ จากสมการ (5) จะได้ว่า $3|(2^{k+1})$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้

ดังนั้นจากทั้งสองกรณีสรุปได้ว่า สมการไดโอแฟนไทน์ $2^x - 15^y = z^2$ มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ (x, y, z) สี่ผลเฉลย คือ $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 1)$, $(4, 1, 1)$ และ $(6, 1, 7)$

จากทฤษฎีบท 5 สามารถนำมาพิสูจน์บทแทรกต่อไปนี้

บทแทรก 6 สมการไดโอแฟนไทน์ $4^x - 15^y = z^2$ มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ (x, y, z) เพียงสามผลเฉลย คือ $(0, 0, 0)$, $(2, 1, 1)$ และ $(3, 1, 7)$

พิสูจน์ ให้ x, y และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ซึ่งทำให้ $4^x - 15^y = z^2$ หรือ $2^{2x} - 15^y = z^2$ ดังนั้นจากทฤษฎีบท 5 จะได้ว่า $(x, y, z) \in \{(0, 0, 0), (2, 1, 1), (3, 1, 7)\}$

ทฤษฎีบท 7 สมการไดโอแฟนไทน์ $3^x - 15^y = z^2$ มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ (x, y, z) ผลเฉลยเดียว คือ $(0, 0, 0)$

พิสูจน์ ให้ x, y และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ซึ่งทำให้

$$3^x - 15^y = z^2 \quad (9)$$

และเนื่องจาก $z^2 \geq 0$ ดังนั้น $3^x - 15^y \geq 0$ และเนื่องจาก $3 < 15$ เพราะฉะนั้น $x > y$ จะได้ว่า

$$3^y(3^{x-y} - 5^y) = z^2 \quad (10)$$

ต่อไปจะแสดงว่า $\gcd(3^y, 3^{x-y} - 5^y) = 1$

ให้ $\gcd(3^y, 3^{x-y} - 5^y) = d$ เพราะฉะนั้น $d|3^y$ และ $d|(3^{x-y} - 5^y)$ จะได้ว่า มีจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ u ซึ่งทำให้ $d = 3^u$ ถ้า $u > 0$ เพราะฉะนั้น $3|d$ และเนื่องจาก $d|(3^{x-y} - 5^y)$ จะได้ว่า $3|(3^{x-y} - 5^y)$ และจาก $x > y$ ดังนั้น $3|3^{x-y}$ จะได้ว่า $3|5^y$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ ดังนั้น $u = 0$ นั่นคือ $d = 1$ หรือ $\gcd(3^y, 3^{x-y} - 5^y) = 1$ และจาก $\gcd(3^y, 3^{x-y} - 5^y) = 1$ และสมการ (10) จะมีจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ a และ b ซึ่งทำให้ $z = ab$ และ

$$3^y = a^2 \quad (11)$$

และ

$$3^{x-y} - 5^y = b^2 \quad (12)$$

จากสมการ (11) จะได้ว่า y เป็นจำนวนคู่ และจากสมการ (12) และทฤษฎีบท 4 จะได้ว่า $x = 0$ และ $y = 0$

และจากสมการ (9) จะได้ว่า $z = 0$ นั่นคือ $(x, y, z) = (0, 0, 0)$

จากทฤษฎีบท 7 สามารถนำมาพิสูจน์บทแทรกต่อไปนี้

บทแทรก 8 สมการไดโอแฟนไทน์ $9^x - 15^y = z^2$ มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ (x, y, z) ผลเฉลยเดียว คือ $(0, 0, 0)$

พิสูจน์ ให้ x, y และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ซึ่งทำให้ $9^x - 15^y = z^2$ หรือ $3^{2x} - 15^y = z^2$ ดังนั้นจากทฤษฎีบท 7 จะได้ว่า $(x, y, z) = (0, 0, 0)$

5. อภิปรายผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

ในงานวิจัยนี้ได้พิสูจน์ว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $2^x - 15^y = z^2$ มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ (x, y, z) สี่ผลเฉลย คือ $(0, 0, 0), (1, 0, 1), (4, 1, 1)$ และ $(6, 1, 7)$ และสมการไดโอแฟนไทน์ $3^x - 15^y = z^2$ มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ (x, y, z) เพียงผลเฉลยเดียว คือ $(0, 0, 0)$ นอกจากนี้ได้พิสูจน์ว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $4^x - 15^y = z^2$ มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ (x, y, z) สามผลเฉลย คือ $(0, 0, 0), (2, 1, 1)$ และ $(3, 1, 7)$ โดยในการพิสูจน์ดังกล่าวได้ใช้ความรู้พื้นฐานทางทฤษฎีจำนวน เช่น สมภาค จำนวนเฉพาะและตัวหารร่วมมาก เป็นต้น และสำหรับในการศึกษาครั้งต่อไป โจทย์ที่น่าสนใจ คือ การหาผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ (x, y, z) ของสมการไดโอแฟนไทน์ที่อยู่ในรูป $n^x - 15^y = z^2$ เมื่อ $n > 4$ เป็นจำนวนเต็มบวก

6. กิตติกรรมประกาศ

งานวิจัยได้รับทุนสนับสนุนจากมหาวิทยาลัยราชภัฏเทพสตรี

7. เอกสารอ้างอิง

- Burton, D.M. (2010). Elementary number theory. 7th ed., New York: McGraw-Hill.
- Chuayjan, W., Thongnak, S. and Kaewong, T. (2023a). On the exponential Diophantine equation $10^x - 17^y = z^2$. *Annals of Pure and Applied Mathematics*, 28(1), 21-24. <https://doi.org/10.22457/apam.v28n1a04910>.
- Chuayjan, W., Thongnak, S. and Kaewong, T. (2023b). On the exponential Diophantine equation $3^x - 5^y = z^2$. *Annals of Pure and Applied Mathematics*, 28(1), 25-28. <https://doi.org/10.22457/apam.v28n1a05915>.
- Gope, R.C. (2023). On the exponential Diophantine equation $27^x - 11^y = z^2$. *Journal of Physical Sciences*, 28, 11-15. <https://doi.org/10.62424/jps.2023.28.00.02>.
- Kaewong, T., Chuayjan, W. and Thongnak, S. (2023). On the exponential Diophantine equation $29^x - 3^y = z^2$. *International Journal of Latest Technology in Engineering, Management & Applied Science*, 12(11), 74-76. <https://doi.org/10.51583/IJLTEMAS.2023.121109>.
- Kaur, D. and Sambhor, M. (2017). Diophantine equations and its applications in real life. *International Journal of Mathematics and its applications*, 5(2B), 217-222. <https://ijmaa.in/index.php/ijmaa/article/view/811>.
- Mihăilescu, P. (2004). Primary cyclotomic units and a proof of Catalan's conjecture. *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, 572, 167-195. <https://doi.org/10.1515/crll.2004.048>.
- Rao, C.G. (2022). On the exponential Diophantine equation $23^x - 19^y = z^2$. *Journal of Physical Sciences*, 27, 1-4. <https://li05.tci-thaijo.org/index.php/buuscij/article/view/488>

- Siraworakun, A. and Tadee, S. (2024). All solutions of the Diophantine equation $25^x - 7^y = z^2$. *International Journal of Mathematics and Computer Science*, 19(3), 631-633.
- Tadee, S. (2023). A short note on two Diophantine equations $9^x - 3^y = z^2$ and $13^x - 7^y = z^2$. *Journal of Mathematics and Informatics*, 24, 23-25. <https://doi.org/10.22457/jmi.v24a02215>.
- Thongnak, S., Chuayjan, W. and Kaewong, T. (2019). On the exponential Diophantine equation $2^x - 3^y = z^2$. *Southeast-Asian Journal of Sciences*, 7(1), 1-4. <https://sajs.ntt.edu.vn/index.php/jst/article/view/153>
- Thongnak, S., Chuayjan, W. and Kaewong, T. (2022). On the Diophantine equation $7^x - 2^y = z^2$, where x, y and z are non-negative integers. *Annals of Pure and Applied Mathematics*, 25(2), 63-66. <https://doi.org/10.22457/apam.v25n2a01862>.