Pathumwan Academic Journal, Vol. 5, No. 12, January - April 2015: 21 - 29

การคำนวณมิติของรูปทรงเรขาคณิตที่ซับซ้อนด้วยการวัดแบบสาทิสรูป

Calculating Dimension of Complex Geometric Shape Using Fractal Measurement

อมร คุ้มทรัพย์สิริ*

สาขาวิชาวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี สถาบันเทคโนโลยีปทุมวัน

833 ถนนพระรามที่1 แขวงวังใหม่ เขตปทุมวัน กรุงเทพฯ 10330 Email: amorn.ptwit@gmail.com

Amorn Koomsubsiri*

Department of Science and Mathematics, Faculty of Science and Technology,

Pathumwan Institute of Technology

833 Rama I Road, Wang Mai, Pathumwan, Bangkok 10330, Thailand. Email: amorn.ptwit@gmail.com

บทคัดย่อ

บทความนี้กล่าวถึงหลักการวัดมิติแบบสาทิสรูป ซึ่งวิธีนี้ใช้สำหรับคำนวณค่ามิติของรูปทรงที่มีความไม่แน่นอน เช่น ฝุ่นคันทอร์ เกล็ดหิมะค็อค และฟองน้ำเมงเงอร์ ลักษณะเฉพาะที่สำคัญของเรขาคณิตแบบสาทิสรูป คือมีคุณสมบัติความคล้ายตนเอง ค่าการประมาณด้วยวิธีสาทิสรูปเป็นค่าที่ไม่ใช่จำนวนเต็มและเรียกค่านั้นว่าค่ามิติสาทิสรูป การวัดแบบสาทิสรูปมีหลายวิธี ซึ่งในบทความนี้นำเสนอเฉพาะการวัดแบบบอกซ์เคาน์ติ้ง

คำสำคัญ: สาทิสรูป บอกซ์เคาน์ติ้ง ความคล้ายตนเอง ฝุ่นคันทอร์ เกล็ดหิมะค็อค ฟองน้ำเมงเงอร์

Abstract

This article describes the concept of the fractal dimension measurement that is used to compute the dimension of the irregular shapes such as cantor dust, Koch snowflake and Menger sponge. An important charateristic of fractal geometries is self-similarity. The fractal scaling is specified by non-integer numbers, so called fractal dimension. There are several fractal measurement methods, but only box-counting method will be presented here.

Keywords: Fractal, box-counting, self-similarity, cantor dust, Koch snowflake, Menger sponge

---

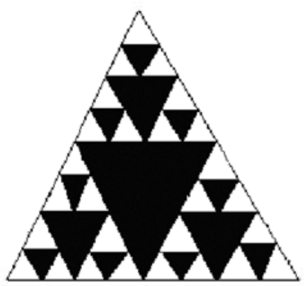
Tutorial Paper
Received 13 February 2015
Accepted 31 March 2015
***Corresponding author**

1. บทนำ

ในปัจจุบันวิชาเรขาคณิตสามารถที่จะอธิบายวัตถุที่มีมิติเป็นจำนวนเต็มได้ เช่น จุดมีศูนย์มิติ เส้นตรงมีหนึ่งมิติ พื้นที่มีสองมิติ และปริมาตรที่มีสามมิติ แต่ในธรรมชาติจริงๆนั้น วัตถุบางอย่างไม่สามารถที่จะอธิบายรูปร่างของสิ่งเหล่านั้นได้ด้วยวิชาเรขาคณิต เช่น ก้อนเมฆ เกล็ดหิมะ เส้นชายฝั่งทะเล ภูเขา หรือ ต้นไม้ ได้ เนื่องจากสิ่งเหล่านี้มีรูปร่างที่มีความซับซ้อนสูง ไม่แน่นอน (irregular shapes) หรือมีมิติที่ไม่เท่ากับจำนวนเต็มในระบบเรขาคณิต Benoit B. Mandelbrot ได้สร้างระบบเรขาคณิตขึ้นใหม่ เรียกว่า เรขาคณิตแบบสาทิสรูป (fractal geometry) เพื่อใช้อธิบายวัตถุในธรรมชาติ และใช้อธิบายปรากฏการณ์ทางคณิตศาสตร์ เช่น ฝุ่นคันทอร์ (cantor dust), สามเหลี่ยมซูร์พินสกี (Sierpinski triangle), ฟองน้ำเมงเงอร์ (Menger sponge), เส้นโค้งค็อคและเกล็ดหิมะค็อค (Koch curve and Koch snowflake) ดังรูปที่ 1 ถึง 4 ตามลำดับ วัตถุทางเรขาคณิตที่มีความคล้ายตนเองหรือมีรูปแบบการจำลองตัวเอง (self-similarity) จะมีคุณสมบัติที่สำคัญ คือ ถ้าขยายส่วนใดส่วนหนึ่งหรือตัดส่วนใดส่วนหนึ่งของโครงสร้างหลักที่เป็นแบบสาทิสรูปออก ส่วนที่ตัดหรือส่วนที่ขยายออกมานี้จะมีความคล้ายคลึงหรือเหมือนกับโครงสร้างหลักเดิมทั้งอัน

วิธีการคำนวณมิติแบบสาทิสรูปมีมากมายหลายวิธี เช่น มิติเฮาส์ดอร์ฟ (Hausdorff dimension), มิติสัมพันธ์ (correlation dimension) และ มิติบอกซ์เคาน์ติ้ง (box-counting dimension) เป็นต้น ซึ่งในบทความนี้ได้นำเสนอเฉพาะวิธีมิติบอกซ์เคาน์ติ้งเท่านั้น

รูปที่ 1 ฝุ่นคันทอร์



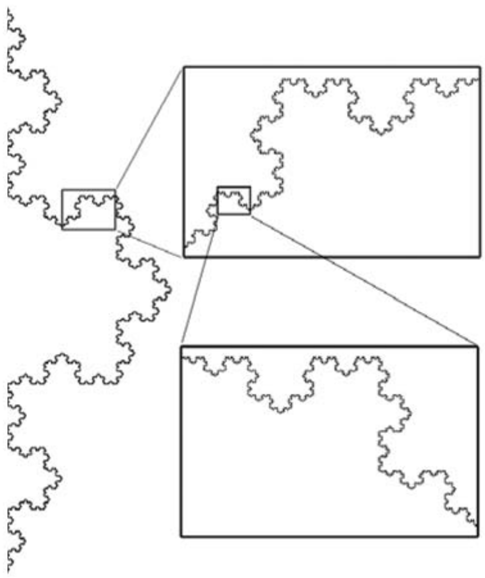
รูปที่ 2 สามเหลี่ยมซูร์พินสกี

รูปที่ 3 ฟองน้ำเมงเงอร์

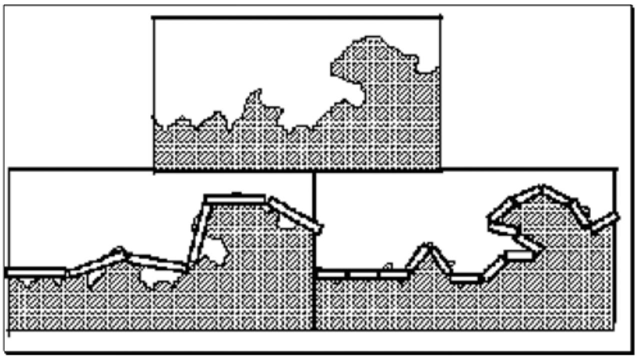
รูปที่ 4 เส้นโค้งค็อคและเกล็ดหิมะค็อค

2. มิติสาทิสรูปแบบบอกซ์เคาน์ติ้ง

หลักการที่สำคัญของวิธีสาทิสรูปคือรูปแบบการเปลี่ยนแปลงของรูปทรงในแต่ละขั้นตอนมีลักษณะเหมือนเดิมหรือเรียกว่ารูปแบบการจำลองตัวเอง ซึ่งการจำลองตัวเองซ้ำๆกันในแต่ละครั้ง หน่วยของขนาดของรูปทรงจะมีขนาดเล็กลงจากเดิมตามอัตราส่วนดังเส้นโค้งค็อคในรูปที่ 5 กรอบสีแดง เป็นการขยายรูปออกมาเฉพาะส่วน ซึ่งรูปแบบที่ขยายได้จะมีลักษณะที่ไม่แตกต่างจากเดิม และถ้าขยายรูปเพิ่มมากขึ้น ตามกรอบสีน้ำเงิน รูปแบบก็จะมีลักษณะเหมือนเดิมเช่นกัน

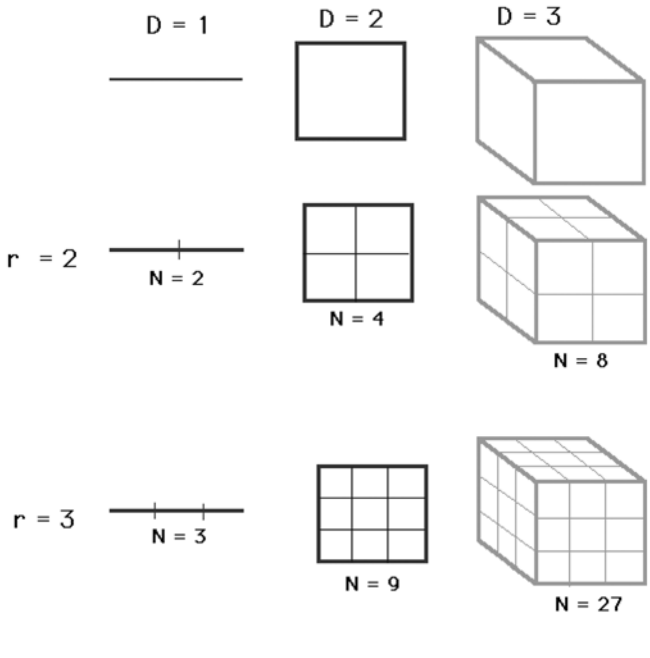


รูปที่ 5 รูปแบบการจำลองตัวเอง



รูปที่ 6 ความยาวของชายฝั่งทะเลที่เปลี่ยนแปลงไปในแต่ละครั้งเมื่อมีการลดขนาดของอุปกรณ์การวัด

เส้นโค้งค็อคเป็นรูปแบบที่มีลักษณะใกล้เคียงกับสิ่งที่มีอยู่จริงในธรรมชาติ เช่น ชายฝั่งทะเล ดังรูปที่ 6 โดยสมมติให้ชายฝั่งทะเลในรูปมีความยาวขนาด 1 เมตร ต่อมาถ้ามีอุปกรณ์วัดความยาวที่มีขนาดสั้นกว่า 1 เมตร วัดต่อกันตามแนวรอยหยักของชายฝั่งทะเล จะวัดความยาวชายฝั่งได้มากกว่า 1 เมตร และถ้าขยายรูปนี้ให้ใหญ่ขึ้นอีกก็จะเห็นว่ามีรอยหยักมากขึ้นและถ้าเราใช้อุปกรณ์วัดความยาวที่มีขนาดเล็กมาก ๆ ความยาวของชายฝั่งทะเลที่วัดได้ก็จะมีความยาวมากขึ้นเรื่อย ๆ เช่นเดียวกัน



รูปที่ 7 การกำหนดมิติของรูปทรง

จากแนวคิดดังกล่าวเมื่อนำมาประยุกต์ใช้กับการหาขนาดมิติของรูปทรงต่างๆ โดยพิจารณาจากรูปทรงพื้นฐานอย่างเช่น เส้นตรง รูปสี่เหลี่ยม และรูปกล่องสี่เหลี่ยม ดังรูปที่ 7 โดยกำหนดให้เส้นตรงมีความยาวขนาด 1

หน่วย ถ้าต้องการลดขนาดให้น้อยกว่าเดิม 2 เท่า $(r=2)$ จะต้องใช้เส้นตรงที่ขนาดลดลงนี้ 2 เส้น $(N=2)$ ต่อกัน จึงจะทำให้ได้เส้นตรงที่มีขนาดเท่าเดิม $(2=2^1)$ ถ้าเป็นรูป 2 มิติ เช่นรูปสี่เหลี่ยม โดยสมมติให้มีขนาดพื้นที่ 1 ตารางหน่วย ถ้าต้องการลดขนาดพื้นที่ให้น้อยกว่าเดิม 2 เท่า $(r=2)$ จะต้องใช้รูปสี่เหลี่ยมที่มีขนาดพื้นที่ลดลงนี้ 4 รูป $(N=4)$ เรียงต่อกัน จึงจะได้รูปสี่เหลี่ยมที่มีขนาดพื้นที่เท่าเดิม $(4=2^2)$ และเช่นเดียวกันกับรูปทรง 3 มิติ เช่น รูปกล่องสี่เหลี่ยม ที่มีขนาดความจุ 1 ลูกบาศก์หน่วย ต้องการลดปริมาตรให้น้อยกว่าเดิม 2 เท่า $(r=2)$ จะต้องใช้กล่องสี่เหลี่ยมที่ลดปริมาตรลงนี้ 8 กล่อง $(N=8)$ จึงจะได้กล่องสี่เหลี่ยมที่มีความจุเท่าเดิม $(8=2^3)$

ดังนั้นจากความสัมพันธ์ข้างต้น ขนาดมิติของรูปทรงสามารถอธิบายได้โดยใช้สมการที่ (1)

$$N = r^D \tag{1}$$

โดยที่ N แทนจำนวนชิ้นส่วนที่ใช้

r แทนจำนวนเท่าของขนาดหรือความยาวที่ลดลง

D แทนค่ามิติ

จากนั้นกำหนดวิธีการหาค่ามิติด้วยวิธีการสาทิสรูป โดยจากสมการที่ 1 จะได้ว่า

$$D = \lim_{r\to\infty}\frac{\ln N}{\ln r} \tag{2}$$

หรือ

$$D = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\ln N}{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} \tag{3}$$

โดยที่ ε คือค่าของขนาดหรือความยาวที่ลดลงในอัตราส่วนที่เท่ากันเมื่อเทียบจากขนาดเดิม

3. ตัวอย่างการหาค่ามิติด้วยวิธีสาทิสรูปแบบบอกซ์เคาน์ติ้ง

ในบทความนี้นำเสนอตัวอย่างการหาค่ามิติด้วยวิธีสาทิสรูปแบบบอกซ์เคาน์ติ้งโดยใช้รูป ฝุ่นแบบคันทอร์ เกล็ดหิมะค็อค และฟองน้ำเมงเงอร์ ซึ่งมีขั้นตอนการพิจารณาดังนี้

3.1 ฝุ่นแบบคันทอร์

พิจารณาจากรูปที่ 8 กำหนดให้เส้นตรงเริ่มต้นมีความยาวขนาด L หน่วย ต่อมามีการแบ่งออกเป็น 3 ส่วนเท่าๆ กันโดยมีส่วนที่เป็นเส้นตรง 2 ส่วน เป็นช่องว่าง 1 ส่วน เส้นตรงที่ได้นี้จะมีความยาวเป็น $\frac{L}{3}$ เท่าจากเดิม

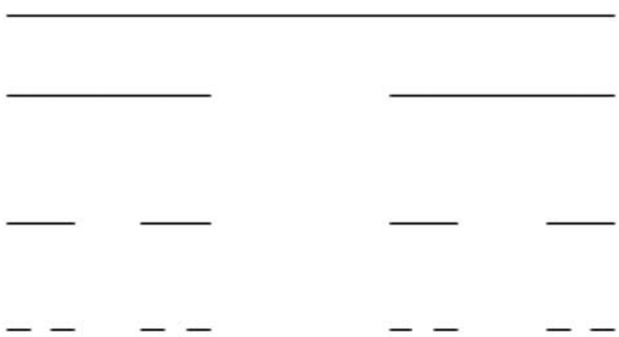
และในขั้นตอนต่อมาก็มีการแบ่งเส้นตรงออกเหมือนเดิมโดยที่ความยาวของเส้นตรงจะลดลงตามอัตราส่วนและมีการทำซ้ำเช่นนี้ไปเรื่อยๆ โดยขนาดความยาวของเส้นตรงจะลดลงด้วยอัตราส่วนเป็น $\lim_{k\to\infty}\frac{L}{3^k}$ ดังนั้นกำหนดให้

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon = \lim_{k\to\infty}\frac{L}{3^k} \tag{4}$$

และ

$$N = 2^k \tag{5}$$

โดยที่ k แทนจำนวนขั้นตอนในการทำซ้ำ



Step	Box	Length
0	1	L
1	2	$\frac{L}{3}$
2	4	$\frac{L}{9}$
3	8	$\frac{L}{27}$

รูปที่ 8 ขั้นตอนการพิจารณาขนาดของฝุ่นคันทอร์

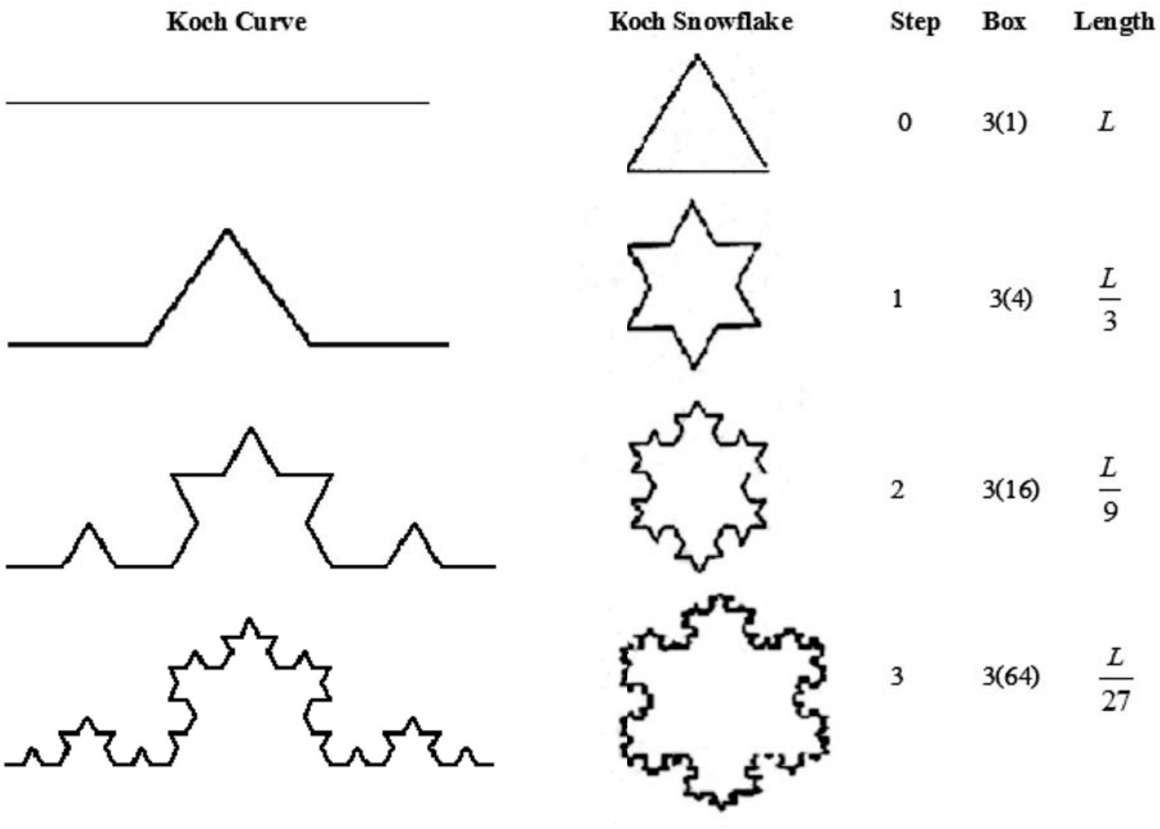
3.2 เกล็ดหิมะค็อค

จากรูปที่ 9 รูปเกล็ดหิมะค็อคประกอบด้วยรูปเส้นโค้งค็อค 3 ด้าน ดังนั้นจะพิจารณารูปแบบการเปลี่ยนแปลงขนาดของเส้นโค้งค็อคในแต่ละขั้นตอน แล้วทำการคูณ 3 เข้าไปแทน จากการเปลี่ยนแปลงของขนาดในแต่ละขั้นตอน กำหนดได้ว่า

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon = \lim_{k\to\infty}\frac{L}{3^k} \tag{6}$$

และ

$$N = 3\left(4^k\right) \tag{7}$$



รูปที่ 9 ขั้นตอนการพิจารณาขนาดของเกล็ดหิมะค็อค

3.3 ฟองน้ำเมงเงอร์

เมื่อพิจารณารูปที่ 10 การเปลี่ยนแปลงของขนาด และจำนวนชิ้นส่วนของฟองน้ำเมงเงอร์สามารถกำหนดความสัมพันธ์ได้ดังนี้

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon = \lim_{k \to \infty} \frac{L}{3^k} \tag{8}$$

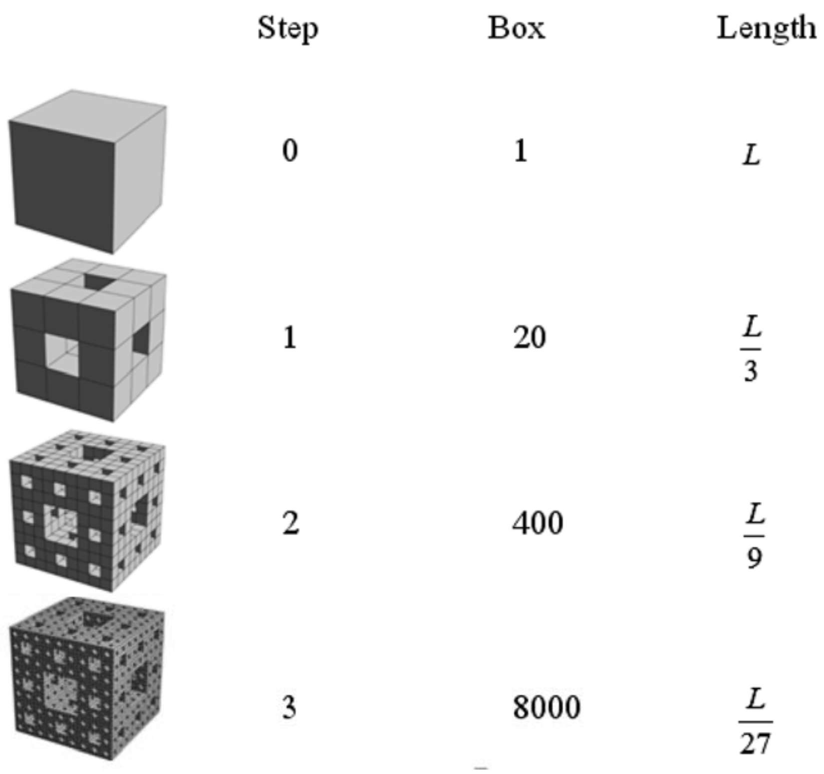
และ

$$N = 20^k \tag{9}$$

4. ผลการทดลอง

จากการวัดค่ามิติของรูปฝุ่นคันทอร์ที่มีลักษณะใกล้เคียงกับเส้นตรง แต่เมื่อวัดค่ามิติด้วยวิธีสาทิสรูปแบบบอกซ์เคาน์ติ้ง โดยใช้ความสัมพันธ์ที่กำหนดขึ้นมา จากสมการที่ (4) – (5) แทนลงในสมการที่ (3) สามารถวัดค่ามิติได้ประมาณ 0.63 เกล็ดหิมะค็อคใช้ความสัมพันธ์ จากสมการที่ (6) – (7) แทนลงในสมการที่ (3) เพื่อวัดค่ามิติ

ได้ผลลัพธ์ประมาณ 1.26 และรูปสุดท้าย ฟองน้ำเมงเงอร์ ที่มีลักษณะใกล้เคียงกับกล่องลูกบาศก์ แต่เมื่อวัดค่ามิติด้วยวิธีสาทิสรูปโดยใช้ความสัมพันธ์จากสมการที่ (8) – (9) สามารถประมาณค่ามิติได้เป็น 2.72 หรือสรุปผลที่ได้ทั้งหมดตามตารางที่ 1



รูปที่ 10 ขั้นตอนการพิจารณาขนาดของฟองน้ำเมงเงอร์

ตารางที่ 1 ค่ามิติของรูปฝุ่นคันทอร์ เกล็ดหิมะค็อค และฟองน้ำเมงเงอร์

รูป	ค่ามิติ
ฝุ่นคันทอร์	0.63
เกล็ดหิมะค็อค	1.26
ฟองน้ำเมงเงอร์	2.72

5. สรุป

โดยส่วนใหญ่การจำลองรูปทรงต่างๆในธรรมชาติด้วยรูปเรขาคณิตจะทำให้รูปแบบที่เกิดขึ้นมีความซับซ้อนมากและไม่สามารถวัดมิติในแบบปกติได้ เช่น ฝุ่นคันทอร์ เกล็ดหิมะค็อค และฟองน้ำเมงเงอร์ แต่ใน

บทความนี้ได้นำเสนอการคำนวณมิติด้วยวิธีสาทิสรูปแบบบอกซ์เคาน์ติ้ง ลักษณะเฉพาะที่สำคัญของวิธีสาทิสรูปคือการมีคุณสมบัติความคล้ายตนเอง มีการสร้างรูปแบบอย่างง่าย ๆ และอาศัยหลักการวนซ้ำรูปแบบที่กำหนดไปเรื่อย ๆ ไม่มีที่สิ้นสุดเพื่อประมาณค่ามิติออกมาให้ได้ใกล้เคียงมากที่สุด ซึ่งค่ามิติที่ได้เรียกว่าค่ามิติแบบสาทิสรูปเป็นค่ามิติที่ไม่ใช่จำนวนเต็มโดยในบทความนี้ได้แสดงค่ามิติแบบสาทิสรูปของฝุ่นคันทอร์ เกล็ดหิมะค็อค และฟองน้ำเมงเงอร์ ออกมาได้ประมาณ 0.63, 1.26 และ 2.72 ตามลำดับ

หลักการของสาทิสรูปยังนำไปใช้ประโยชน์ในด้านอื่นๆ ได้อีกหลายด้าน เช่นทางด้านคอมพิวเตอร์กราฟฟิคสามารถเพิ่มความละเอียดของภาพให้มีความสวยงามมากขึ้นด้วยการกำหนดและจัดเรียงรูปแบบตอนเริ่มต้นจากนั้นทำการซ้อนภาพด้วยภาพเดิมแล้วทำซ้ำไปเรื่อยๆ นอกจากนี้หลักการสาทิสรูปยังสามารถนำไปใช้ในการตรวจสอบพฤติกรรมความอลวน (Chaos) ของปรากฏการณ์ต่างๆได้อีกด้วย เช่น ความอลวนในตัวกรองสัญญาณแบบดิจิตอล ความแปรปรวนของสภาพภูมิอากาศ รวมถึงการศึกษารูปแบบเฉพาะตัวของการเต้นของหัวใจ เป็นต้น

เอกสารอ้างอิง

[1] ศศิธร ปัจจุโส. (2012). ทฤษฎีความอลวนกับอุตุนิยมวิทยา. วารสารวิทยาศาสตร์ มข., ปีที่ 40 ฉบับที่ 1 หน้า 66-74.

[2] Robert C. Hilborn, (2000), Chaos and Nonlinear Dynamics, Oxford University Press, New York, 650 p.

[3] Edward B. Burger and Michael Starbird, (2000), The Heart of Mathematics, Key College Publishing, New York, 646 p.

[4] F. Verhulst, (1996), Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems, Springer, New York, 306 p.