

การประยุกต์ใช้เรขาคณิตแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์อย่างง่าย

Application of Geometry in Solving Simple Mathematical Problems

บุญเรือง วังศิลาบัตร*

สาขาวิชาวิศวกรรมการวัดและควบคุม คณะวิศวกรรมศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีปทุมวัน

833 ถนนพระราม 1 แขวงวังใหม่ เขตปทุมวัน กรุงเทพฯ 10330 โทรศัพท์: 02-104-9099 E-mail: boonrwan@gmail.com

Boonruang Wangsilabatra*

Department of Instrumentation and Control Engineering, Faculty of Engineering, Pathumwan Institute of Technology

833 Rama I Road, Wangmai, Pathumwan, Bangkok 10330, Thailand. Tel: 66(0)2-104-9099, E-mail: boonrwan@gmail.com

บทคัดย่อ

บทความนี้นำเสนอ การประยุกต์ใช้เรขาคณิตแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์อย่างง่าย โดยเครื่องมือที่ใช้จะมีเพียงไม้บรรทัดสำหรับเขียนเส้นตรงและวัดระยะทาง กับวงเวียนสำหรับเขียนวงกลมเท่านั้น ทฤษฎีบทสามเหลี่ยมคล้าย ทฤษฎีบทวงกลม และทฤษฎีบทพีทาโกรัส ถูกนำมาใช้เพื่อแก้ปัญหาคณิตศาสตร์อย่างง่ายที่น่าสนใจอย่างมีประสิทธิภาพ

คำสำคัญ: เรขาคณิต, ปัญหาคณิตศาสตร์

Abstract

This paper presents the application of geometry in solving simple mathematical problems. Only simple tools such as a ruler for distance measuring and a compass for circle drawing are needed. Certain theorems in geometry, the similar triangle theorem, some theorem on circle and the Pythagoras theorem are employed in effectively solving simple mathematical problems of interest.

Keywords: geometry, mathematical problem

1. บทนำ

นักคณิตศาสตร์ชาวกรีก แห่งเมืองเอเล็กซานเดรีย นามว่า “ยูคลิด” ที่มีชีวิตอยู่ประมาณ พ.ศ. 218 [1] และได้เขียนหนังสือที่เกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์ไว้ 13 เล่ม ในชื่อว่า “The element” จนเป็นที่ยอมรับกันว่าเป็นหนังสือเล่มแรกของโลกที่ใช้กันอย่างแพร่หลาย จนทำให้ยูคลิดได้รับการขนานนามว่าเป็นนักคณิตศาสตร์ผู้ยิ่งใหญ่ [2] ในหนังสือเรขาคณิตของยูคลิด ได้กล่าวถึง นิยามและสัจพจน์ นิยามที่ได้รับการพิจารณาเป็นพิเศษ ก็คือนิยามของคำว่า “จุด” ซึ่งได้กล่าวไว้ว่า หมายถึงสิ่งที่ไม่มีความกว้าง ความยาว และความหนา จนในที่สุดปัจจุบันจึงถือว่าเป็นนิยาม ยูคลิดได้เขียนสัจพจน์ที่เกี่ยวข้องกับการเขียนเส้นตรง การเขียนวงกลม ลักษณะของมุมฉาก และการเขียนเส้นขนานบนพื้นระนาบ [3] สัจพจน์ที่ถูกวิจารณ์อย่างมากก็คือสัจพจน์ที่เกี่ยวกับเส้นขนาน จนทำให้เกิดเป็นทฤษฎีของเรขาคณิตแขนงอื่น ๆ อีกมากมาย เช่น เรขาคณิตบนพื้นผิวทรงกลม เป็นต้น

เรขาคณิตมีประโยชน์อย่างมากสำหรับนักคณิตศาสตร์ เพื่อใช้ในการคำนวณและแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ เช่นใช้ในการคำนวณหาความยาวของรัศมีและเส้นรอบวงของโลก ระยะห่างระหว่างโลกกับดวงอาทิตย์ การคำนวณหาพื้นที่ผิวของวัตถุหรือตามบริเวณต่าง ๆ การคำนวณหาปริมาตรของ

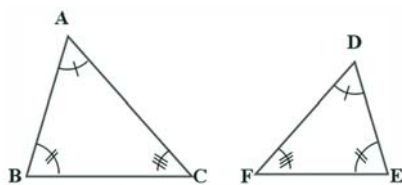
รูปทรงต่าง ๆ เพื่อใช้ในการออกแบบบรรจุก้นที่เห็นโดยทั่วไป

นำมาประยุกต์ใช้กันเป็นอย่างมากในการคำนวณหาระยะทางที่ไกล ๆ ได้

2. ทฤษฎีบทเรขาคณิตที่เกี่ยวข้อง

2.1 ทฤษฎีบทสามเหลี่ยมคล้าย

รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีขนาดของมุมเท่ากันสามคู่ เรียกว่า “รูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกัน” [4] ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปใดคล้ายกัน อัตราส่วนของความยาวของด้านคู่ที่อยู่ตรงข้ามกับมุมคู่ที่มีขนาดเท่ากันจะเท่ากัน หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งว่า ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปใดคล้ายกัน อัตราส่วนของความยาวของด้านคู่ที่สมนัยกันจะเท่ากัน



รูปที่ 1 $\triangle ABC$ คล้ายกับ $\triangle DEF$

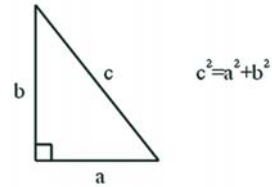
พิจารณารูปที่ 1 จะได้ความสัมพันธ์ระหว่างด้านของสามเหลี่ยมทั้งสองรูปดังสมการที่ (1)

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF} \quad (1)$$

2.2 ทฤษฎีบทไพทาโกรัส

ไพทาโกรัส นักคณิตศาสตร์ชาวกรีกได้กล่าวไว้ว่า “ในรูปสามเหลี่ยมมุมฉากใด ๆ กำลังสองของความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก เท่ากับผลบวกของกำลังสองของความยาวของด้านประกอบมุมฉาก” ทฤษฎีบทนี้เป็นที่ยอมรับ และใช้กันมาจนปัจจุบันนี้ [5]

สมการเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมมุมฉากดังในรูปที่ 2 เป็นสมการที่เกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์ในแขนงวิชาตรีโกณมิติ ที่ว่าด้วยความสัมพันธ์ระหว่างด้านต่าง ๆ ของสามเหลี่ยมมุมฉากและมุมภายในต่าง ๆ ของสามเหลี่ยมมุมฉาก ทำให้มีฟังก์ชันไซน์ โคไซน์ และแทนเจน ขึ้นในวิชาตรีโกณมิติ ซึ่ง

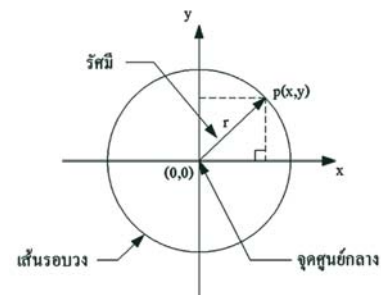


รูปที่ 2 ทฤษฎีบทไพทาโกรัส

2.3 ทฤษฎีบทเกี่ยวกับวงกลม

วงกลมเป็นรูปเรขาคณิตบนระนาบซึ่งทุกๆ จุดบนรูปเรขาคณิตนี้อยู่ห่างจากจุดคงที่จุดหนึ่งบนระนาบเดียวกันเป็นระยะเท่ากัน เรียกจุดคงที่นี้ว่า “จุดศูนย์กลาง” และระยะจากจุดศูนย์กลางถึงเส้นรอบวงเรียกว่า “รัศมี” [6]

รูปที่ 3 เป็นวงกลมที่เขียนอยู่บนระนาบ x-y ซึ่งประกอบด้วยจุดศูนย์กลางที่จุดกำเนิด (0,0) รัศมี r ที่ลากจากจุดกำเนิดจนถึงเส้นรอบวง



รูปที่ 3 วงกลมที่เขียนอยู่บนระนาบ x-y

อาศัยทฤษฎีบทของไพทาโกรัส วงกลมที่แสดงในรูปที่ 3 สามารถเขียนสมการแสดงความสัมพันธ์ได้ดังสมการที่ (2)

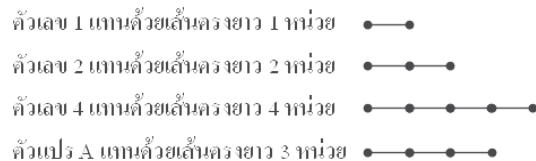
$$r^2 = x^2 + y^2 \quad (2)$$

3. การประยุกต์ใช้เรขาคณิตแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์อย่างง่าย

ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่ประสบกันโดยทั่วไป ได้แก่ การบวก การลบ การคูณ การหาร ส่วนทางด้านวิศวกรรม

มักจะประสบปัญหาเช่น การหาค่าจำนวนเลขที่ยกกำลัง และการหาค่ารากของจำนวนตรรกยะ ซึ่งในปัจจุบันสามารถแก้ปัญหเหล่านี้ได้ง่ายโดยใช้เครื่องคำนวณอิเล็กทรอนิกส์อย่างไรก็ตาม ปัญหาดังกล่าวนี้สามารถแก้ได้โดยการประยุกต์ใช้เรขาคณิตมาพิจารณาเพื่อหาคำตอบได้โดยง่าย

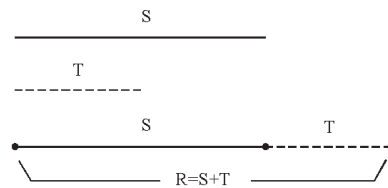
การประยุกต์ใช้เรขาคณิตแก้ปัญหาด้านคณิตศาสตร์ จะใช้ความยาวของเส้นตรงแทนจำนวนตัวเลขที่ต้องการแก้ปัญหา เช่น จำนวนตัวเลขมีค่าเป็น 2 ก็จะแทนความหมายด้วยเส้นตรงที่มีความยาวเป็น 2 หน่วย โดยที่ หน่วยอาจจะเป็น เซนติเมตร นิ้ว เมตร หรือ ความยาวในระบบการวัดอื่น ๆ โดยที่จำนวนตัวเลขอาจอยู่ในรูปของตัวแปรทางคณิตศาสตร์ก็ได้ดังแสดงในรูปที่ 4



รูปที่ 4 การแทนจำนวนตัวเลขด้วยความยาวของเส้นตรง

3.1 การบวก

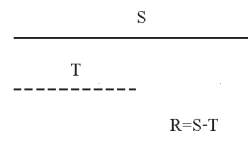
การบวกจะเหมือนกับการต่อความยาวของเส้นตรงที่แทนความหมายของจำนวนเลขที่เป็นตัวตั้งให้ชิดออกไปเท่ากับความยาวของเส้นตรงที่แทนความหมายของจำนวนเลขที่เป็นตัวบวก เช่น S เป็นตัวตั้งและ T เป็นตัวบวก โดยที่ R จะเป็นผลลัพธ์ของการบวก จะมีค่าเท่ากับผลรวมความยาวของเส้นตรง S และเส้นตรง T หรืออีกนัยหนึ่งก็คือการยืดความยาวของเส้นตรง S ออกไปให้เท่ากับความยาวของเส้นตรง T ซึ่งความยาวสุดท้ายที่ได้จากการต่อจะเป็นผลลัพธ์ที่มีความยาวเท่ากับเส้นตรง R ดังแสดงในรูปที่ 5



รูปที่ 5 การประยุกต์ใช้เรขาคณิตในการบวก

3.2 การลบ

การลบนั้นกลับกันกับการบวก คือความยาวของเส้นตรงที่แทนความหมายของตัวตั้งจะถูกหักออกไปด้วยความยาวของเส้นตรงที่แทนความหมายของตัวลบ เช่น S เป็นตัวตั้งและแทนด้วยเส้นตรงยาว 2 หน่วย โดยที่ T เป็นตัวลบและแทนด้วยเส้นตรงยาว 1 หน่วย ดังนั้น R ซึ่งเป็นผลลัพธ์ของการลบ จะมีค่าเท่ากับความยาวของเส้นตรง S หักออกด้วยความยาวของเส้นตรง T ดังแสดงในรูปที่ 6



รูปที่ 6 การประยุกต์ใช้เรขาคณิตในการลบ

3.3 การคูณ

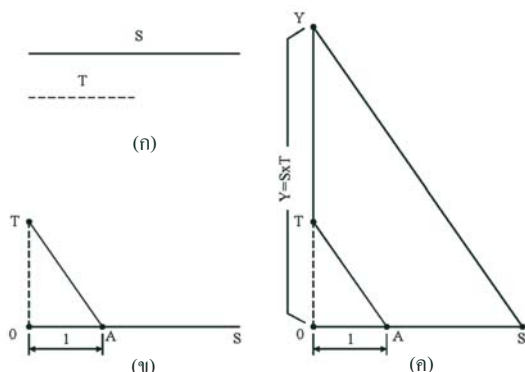
สำหรับการคูณ เช่น $S \times T$ ให้ดำเนินการตามขั้นตอนดังต่อไปนี้

- ก. กำหนดค่าความยาวเส้นตรงแทนตัวตั้ง S และตัวคูณ T ดังในรูปที่ 7(ก)
- ข. วางเส้นตรงที่มีความยาวเท่ากับ 1 หน่วยบนแกนของเส้นตรงแทนตัวตั้ง S ที่ตำแหน่ง A และวางเส้นตรงแทนตัวหาร T ให้ตั้งฉากกับเส้นตรงแทนตัวตั้ง S และลากเส้นตรง AT ดังในรูปที่ 7(ข)
- ค. ลากเส้นที่ปลายอีกข้างของเส้นตรงแทนตัวตั้ง S ให้ขนานกับเส้นตรง AT ต่อจากนั้นต่อปลาย

บุญเรือง วัชชีลาบัตร / วารสารวิชาการปฐมวัน ปีที่ 3 ฉบับที่ 8 กันยายน - ธันวาคม 2556

ของเส้นตรงแทนตัวคูณ T ให้ตัดกันกับเส้นที่ลากจากปลายของ S ซึ่งขนานกับเส้นตรง AT ไปตัดกันที่จุด Y ดังในรูปที่ 7(ค)

- ง. ความยาวของเส้นตรงจาก 0 จนถึง Y จะเป็นผลลัพธ์ของ $S \times T$



รูปที่ 7 การประยุกต์ใช้เรขาคณิตในการคูณ

ผลดังรูปที่ 7 สามารถพิสูจน์ได้โดยใช้ทฤษฎีบทสามเหลี่ยมคล้าย ดังสมการที่ (3) ต่อไปนี้

$$\frac{Y}{T} = \frac{S}{A} = \frac{S}{1} \quad (3)$$

$\therefore Y = S \times T$

3.4 การหาร

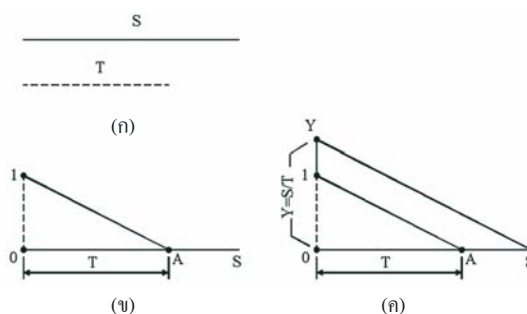
สำหรับการหาร จะแยกออกเป็นสองกรณี คือในกรณีที่ตัวตั้ง S มีค่ามากกว่าตัวหาร T หรือ $S > T$ และในกรณีที่ตัวตั้ง S มีค่าน้อยกว่าตัวหาร T หรือ $S < T$

กรณีที่ $S > T$ ให้ดำเนินการตามขั้นตอนดังต่อไปนี้

- กำหนดค่าความยาวเส้นตรงแทนตัวตั้ง S และตัวหาร T ดังในรูปที่ 8(ก)
- วางเส้นตรงที่มีความยาวเท่ากับ เส้นตรงแทนตัวหาร T บนแกนของเส้นตรงแทนตัวตั้ง S ที่ตำแหน่ง A และวางเส้นตรงที่มีขนาด 1 หน่วยให้ตั้งฉากกับเส้นตรงแทนตัวตั้ง S และลากเส้นตรงจากจุด A จนถึงปลายเส้นตรงที่มีขนาด 1 หน่วย ดังในรูปที่ 8(ข)

- ลากเส้นที่ปลายอีกข้างของเส้นตรงแทนตัวตั้ง S ให้ขนานกับเส้นตรง 1A และต่อความยาวของเส้นให้ตัดกันที่จุด Y ดังในรูปที่ 8(ค)

- ง. ความยาวของเส้นตรงจาก 0 จนถึง Y จะเป็นผลลัพธ์ของ S/T



รูปที่ 8 การประยุกต์ใช้เรขาคณิตในการหาร

ในกรณีที่ ตัวตั้ง S มีค่ามากกว่า ตัวหาร T

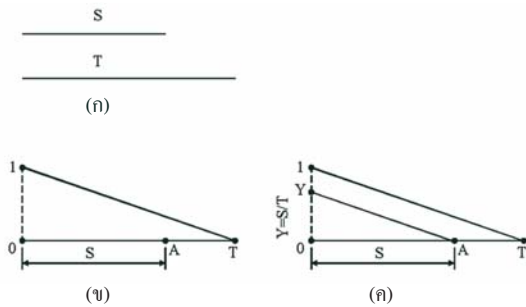
ผลดังรูปที่ 8 สามารถพิสูจน์ได้โดยใช้ทฤษฎีบทสามเหลี่ยมคล้าย ดังสมการที่ (4) ต่อไปนี้

$$\frac{Y}{1} = \frac{S}{A} = \frac{S}{T} \quad (4)$$

$\therefore Y = S/T$

กรณีที่ $S < T$ ให้ดำเนินการตามขั้นตอนดังต่อไปนี้

- กำหนดค่าความยาวเส้นตรงแทนตัวตั้ง S และตัวหาร T ดังในรูปที่ 9(ก)
- วางเส้นตรงที่มีความยาวเท่ากับ เส้นตรงแทนตัวตั้ง S บนแกนของเส้นตรงแทนตัวหาร T ที่ตำแหน่ง A และวางเส้นตรงที่มีขนาด 1 หน่วยให้ตั้งฉากกับเส้นตรงแทนตัวหาร T และลากเส้นตรงจากปลายของตัวหาร T จนถึงปลายเส้นตรงที่มีขนาด 1 หน่วย ดังในรูปที่ 9(ข)
- ลากเส้นตรงจากจุด A ให้ขนานกับเส้นตรง 1S และให้ตัดกันที่จุด Y ดังในรูปที่ 9(ค)
- ความยาวของเส้นตรงจาก 0 จนถึง Y จะเป็นผลลัพธ์ของ S/T



รูปที่ 9 การประยุกต์ใช้เรขาคณิตในการหา
ในกรณีที่ ตัวตั้ง S มีค่าน้อยกว่า ตัวหาร T

ผลดังรูปที่ 9 สามารถพิสูจน์ได้โดยใช้ทฤษฎีบท
สามเหลี่ยมคล้าย ดังสมการที่ (5) ต่อไปนี้

$$\frac{Y}{1} = \frac{A}{T} = \frac{S}{Y} \quad (5)$$

$$\therefore Y = S/T$$

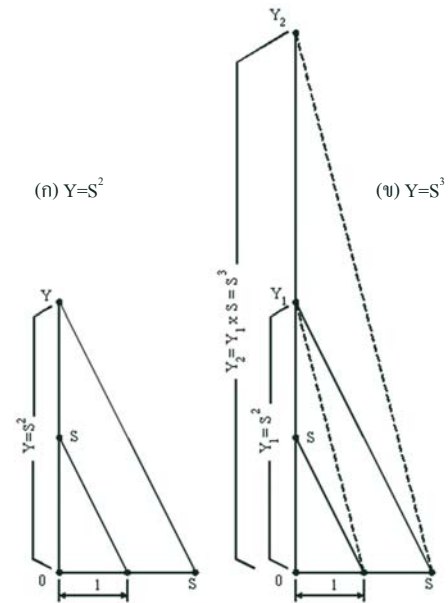
3.4 การหาค่าจำนวนเลขที่ยกกำลัง

ในการหาค่าจำนวนเลขที่ยกกำลัง จะอาศัยหลักการ
ของการคูณดังที่ได้กล่าวไปแล้ว เช่นต้องการหาของ S^2 ซึ่งก็จะมี
ค่าเท่ากับ $S \times S$ ดังนั้นก็เพียงกำหนดค่าความยาวของตัวคูณให้
มีค่าเท่ากับ S และดำเนินการเช่นเดียวกันกับหลักการคูณ
สำหรับตัวเลขยกกำลังที่มีค่ามากกว่า 2 ก็ให้ดำเนินการซ้ำ ๆ
กัน ดังในรูปที่ 10 เป็นการหาผลลัพธ์ของ S^2 และ S^3

3.5 การหาค่ารากของจำนวนตรรกยะ

ถ้า S เป็นจำนวนตรรกยะ ดังนั้นค่ารากที่สองของ S
จะเขียนได้เป็น $\sqrt{S}$ หรือ $S^{1/2}$ และค่ารากที่สี่ของ S จะเขียนได้
เป็น $\sqrt[4]{S}$ หรือ $S^{1/4}$ ขั้นตอนต่อไปนี้จะเป็นการประยุกต์ใช้
เรขาคณิตในการหาค่ารากที่สองของจำนวน S

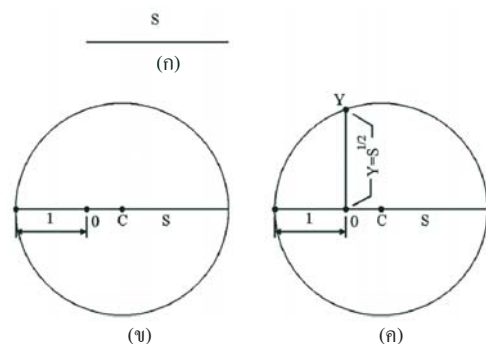
- กำหนดค่าความยาวเส้นตรงแทนจำนวน ดังใน
รูปที่ 11(ก)
- ที่ปลายด้านใดด้านหนึ่งกำหนดให้เป็นจุด O
และต่อความยาวของเส้นตรงออกไปอีกเท่ากับ



รูปที่ 10 การประยุกต์ใช้เรขาคณิตในการหาของ S^2 และ S^3

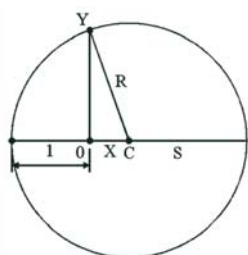
ความยาว 1 หน่วย ความยาวรวมของเส้นตรงทั้ง
สองจะเป็นค่าความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลาง
ของวงกลม โดยมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด C ดังใน
รูปที่ 11(ข)

- ที่จุดต่อ O ลากเส้นตรงตั้งฉากขึ้นไปตัดกับส่วน
ของวงกลมที่จุด Y ดังในรูปที่ 11(ค)
- ความยาวของเส้นตรงจาก O จนถึง Y จะมีค่า
เท่ากับค่ารากที่สองของ S



รูปที่ 11 การหาค่ารากที่สองของ S

พิจารณารูปที่ 11(ค) อาศัยทฤษฎีบทไพธากอรัสทำการพิสูจน์โดยการลากเส้นรัศมีจากจุดศูนย์กลางไปยังจุด Y ดังในรูปที่ 12



รูปที่ 12 การพิสูจน์ในการหาค่ารากที่สองของ S

ระยะของรัศมี R และระยะของ X สามารถคำนวณได้ดังสมการที่ (6) และ (7)

$$R = (S + 1)/2 \quad (6)$$

$$\text{และ} \quad X = (S + 1)/2 - 1 \quad (7)$$

โดยทฤษฎีบทไพธากอรัส

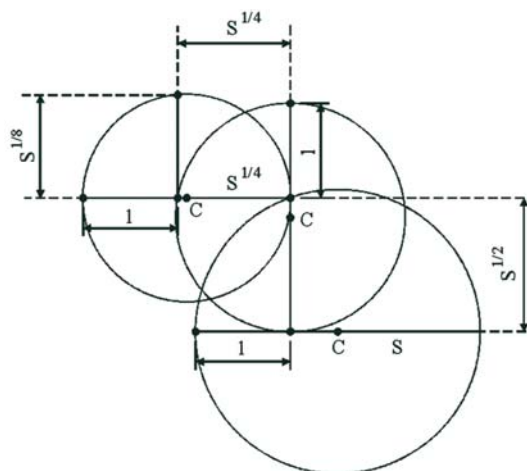
$$\begin{aligned} Y^2 + X^2 &= R^2 \\ Y^2 &= R^2 - X^2 = \left(\frac{(S+1)}{2}\right)^2 - \left(\frac{(S-1)}{2}\right)^2 \quad (8) \\ &= \frac{S^2 + 2S + 1}{4} - \frac{S^2 - 2S + 1}{4} \\ &= S \end{aligned}$$

ดังนั้นจะได้

$$Y = \sqrt{S} \quad (9)$$

จะเห็นจากสมการที่ (9) ว่าระยะของ Y จะมีค่าเท่ากับค่ารากที่สองของ S จริง

สามารถกระทำซ้ำดังรูปที่ 11 ในทำนองเดียวกันเพื่อหาค่ารากที่ 4 ของ S และค่ารากที่ 8 ของ S ได้ตามลำดับดังในรูปที่ 13



รูปที่ 13 การหาค่ารากที่ 2, 4 และ 8 ของ S

4. บทสรุป

การประยุกต์ใช้เรขาคณิตแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์อย่างง่ายที่นำเสนอในบทความนี้ สามารถนำไปใช้ในการหาผลลัพธ์ได้จริง และไม่จำเป็นต้องใช้เครื่องคำนวณที่ทันสมัยแต่อย่างใด เพียงแต่มีเครื่องมือวัดความยาวของเส้นตรงและวงเวียนสำหรับเขียนวงกลม ก็สามารถประยุกต์ใช้หาคำตอบทางคณิตศาสตร์ได้เป็นอย่างดี จะเห็นได้ว่าวิธีการที่ใช้ในการหาผลลัพธ์ทางคณิตศาสตร์ต่าง ๆ นั้น จะเปลี่ยนวิธีการให้เป็นการวัดความยาวเชิงเส้นทั้งหมด ซึ่งเป็นสิ่งที่น่าสนใจ และอาจจะนำไปใช้ประยุกต์ในการคำนวณทางวิศวกรรมได้เป็นอย่างดี

เอกสารอ้างอิง

- [1] ชูกลิด. วิกีพีเดีย สารานุกรมเสรี. Internet: <http://th.wikipedia.org/wiki/ชูกลิด> [November 7, 2013].
- [2] วัฒนา เถาว์ทิพย์, เรขาคณิต. เอกสารประกอบการบรรยาย โครงการส่งเสริมโอลิมปิกวิชาการฯ ศูนย์ สอวน มหาวิทยาลัยขอนแก่น. Internet: <http://www.pwschool.ac.th/files/1105031111214912/files/geometry01512.pdf> [November 11, 2013].

- [3] Euclidean geometry. WIKIPEDIA The Free Encyclopedia Internet: http://en.wikipedia.org/wiki/Euclidean_geometry [November 11, 2013].
- [4] Internet: http://e-arning.kusol.org/pluginfile.php/1343/mod_resource/content/1/M3_T1_CH4_2_content.pdf [November 11, 2013].
- [5] ปัทมาโกศล. การศึกษา ศิลปะ วัฒนธรรม บ้านเพิง บ้านมหา คอทคอม. Internet: <http://www.baanmaha.com/community/thread23435.html> [November 11, 2013].
- [6] Internet: <http://lbbz.wordpress.com/tag/วงกลม> [November 11, 2013].

ประวัติผู้เขียนบทความ

บุญเรือง วงศ์ลาบัตร สำเร็จการศึกษาปริญญาโท สาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า คณะวิศวกรรมศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้า พระนครเหนือ ปัจจุบันดำรงตำแหน่งเป็นผู้ช่วยศาสตราจารย์ ประจำสาขาวิชาวิศวกรรมการวัดและควบคุม คณะวิศวกรรมศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีปทุมวัน

งานวิจัยที่สนใจ: Power Electronics & Control System