

อัลกอริทึมปรับตัวแบบ LMS ชนิดมีค่าการรั่วที่แปรขนาดขั้นได้

A Variable Step Size Leaky Least Mean Square Adaptive Algorithm

ประยุทธ์ อินแบน¹ ราชู พันธุ์ฉลาด^{1*} โชคชัย แสงดาว¹ บุญชัย บุญชู¹
และ วุฒิพร เลิศวาสนา¹

Prayuth Inban¹, Rachu Punchalard^{1*}, Chokchai Sangdao¹,
Boonchai Boonchu¹ and Wuthiporn Loedwassana¹

Received: 21 May 2024

Revised: 29 August 2024

Accepted: 18 November 2024

บทคัดย่อ

บทความนี้นำเสนออัลกอริทึมปรับตัวแบบ LMS ชนิดมีค่าการรั่วที่แปรขนาดขั้นได้ (VS-LLMS) สำหรับปรับค่าสัมประสิทธิ์ของวงจรกรองแบบปรับตัว ซึ่งอัลกอริทึมสำหรับปรับค่าขนาดขั้นจะทำงานอยู่บนพื้นฐานของเกณฑ์ค่าการสะสมอัตราส่วนสัมพัทธ์ฟังก์ชันผิดพลาดกำลังสองโดยอัลกอริทึม VS-LLMS ที่นำเสนอมีความซับซ้อนของการคำนวณที่ต่ำกว่าอัลกอริทึม VSS-LLMS นอกจากนั้นในบทความนี้ได้นำเสนอการวิเคราะห์ในทางทฤษฎีเพื่อพิจารณาคุณลักษณะทางสถิติที่สถานะอยู่ตัวแล้วของอัลกอริทึม ด้วยแบบจำลองทางการประมวลสัญญาณดิจิทัลแบบปรับตัวชนิดการหาเอกลักษณ์ระบบภายใต้กระบวนการสุ่มแบบนิ่งทางสถิติ ผลจากการจำลองแบบได้แสดงให้เห็นถึงความสอดคล้องกับผลจากการวิเคราะห์ทางทฤษฎี และจากการจำลองแบบอัลกอริทึมที่นำเสนอเพื่อเปรียบเทียบกับสมรรถนะกับอัลกอริทึม LLMS และ VSS-LLMS ภายใต้เงื่อนไขทางสถิติของระบบเหมือนกัน พบว่าอัลกอริทึมที่นำเสนอให้ค่า MSD ที่สถานะอยู่ตัวแล้วอยู่ในระดับต่ำกว่าอัลกอริทึมทั้งสองซึ่งแสดงนัยถึงอัลกอริทึมที่นำเสนอมีสมรรถนะที่ดีกว่าทั้งสองอัลกอริทึมดังกล่าว

คำสำคัญ: ตัวกรองแบบปรับตัว ระเบียบวิธี LMS ระเบียบวิธี LLMS

¹ สาขาวิศวกรรมไฟฟ้า คณะเทคโนโลยีอุตสาหกรรม มหาวิทยาลัยราชภัฏราชนครินทร์ ฉะเชิงเทรา ประเทศไทย 24000

¹ Department of Electrical engineering, Faculty of Industrial technology, Rajabhat Rajanagarindra University, Chachoengsao, Thailand 24000

*ผู้พันธ์ประสานงาน (Corresponding author) e-mail: rachu@techno.ru.ac.th

ABSTRACT

This article proposes a variable step-size leaky least mean square (VS-LLMS) adaptive algorithm for an adaptive filter. The proposed variable step-size algorithm is based on the criterion of squared error autocorrelation accumulation. In addition, the proposed VS-LLMS algorithm has computational complexity lower than the VSS-LLMS algorithm. Under the system identification model in stationary process, the theoretical analysis which is the steady state behavior of the algorithm is also proposed in the paper. The simulation results have been shown that, they have trend corresponding with those of the analytical results. Furthermore, the performance comparison of the proposed adaptive algorithm by simulation is also compared to the other algorithms such as LLMS and VSS-LLMS algorithms under the same testing condition of the system. The results have shown that the VS-LLMS algorithm have low level steady-state mean square deviation (MSD) whose values are lower than other algorithms. Therefore, the proposed algorithm outperforms the LLMS and VSS-LLMS algorithms.

Keywords: Adaptive filter; LMS algorithm; LLMS algorithm

บทนำ

เป็นที่ทราบกันโดยทั่วไปว่าอัลกอริทึมปรับตัวแบบค่ากำลังสองเฉลี่ยน้อยสุด (Least mean square) หรือ LMS สำหรับปรับสัมประสิทธิ์ของวงจรกรองแบบปรับตัวได้ถูกนำมาเป็นหัวข้อวิจัยและประยุกต์ใช้งานในด้านต่าง ๆ อย่างกว้างขวาง เนื่องจากเป็นอัลกอริทึมพื้นฐาน มีความซับซ้อนของการคำนวณต่ำและมีเสถียรภาพในการทำงานที่ดี แต่อย่างไรก็ตามในการประยุกต์ใช้งานบางครั้งอาจพบกับกระบวนการสัญญาณทางด้านอินพุตของวงจรกรองมีการกระจายค่าเจาะจง (Eigenvalue dispersion) ของเมตริกซ์อัตโนมัติสหสัมพันธ์ (Autocorrelation matrix) ที่มีค่าอัตราส่วนสูง โดยเฉพาะอย่างยิ่งค่าเจาะจงต่ำสุด ($\lambda_{\min}$) บางครั้งอาจจะมีค่าต่ำใกล้เคียงศูนย์หรือเท่ากับศูนย์ ซึ่งจะส่งผลให้คุณลักษณะการปรับตัวของอัลกอริทึม LMS เป็นโหมดไร้การหน่วง (Undamped mode) ทำให้อัลกอริทึมปรับตัวแบบขาดเสถียรภาพ [1] เพื่อหลีกเลี่ยงการเกิดปัญหาดังกล่าวจึงได้มีการปรับปรุงอัลกอริทึม LMS ให้มีเสถียรภาพในการทำงานมากขึ้นด้วยการเพิ่มค่าคงที่ค่าต่ำๆ เข้าไปในอัลกอริทึมปรับตัวเพื่อให้นำไปสู่การทำให้ค่าเจาะจงต่ำสุดของเมตริกซ์อัตโนมัติสหสัมพันธ์อินพุตไม่เท่ากับศูนย์ หรืออาจจะกล่าวอีกนัยหนึ่งคือทำให้อัตราการกระจายค่าเจาะจงของเมตริกซ์อัตโนมัติสหสัมพันธ์อินพุตลดลงโดยค่าคงที่ดังกล่าวถูกเรียกว่าตัวประกอบการรั่ว (Leakage factor) และเรียกอัลกอริทึมนี้ว่า LMS ชนิดมีการรั่ว (Leaky LMS) หรือ LLMS

ที่ผ่านมามีหลายๆ บทความได้นำเสนอการศึกษาวิจัยและการนำไปประยุกต์ใช้งานในด้านต่างๆ ของอัลกอริทึมปรับตัวแบบ LLMS ดังเช่น Mayyas & Aboulnasr [2] ได้นำเสนอถึงการศึกษาวิเคราะห์คุณลักษณะ ทางทฤษฎีด้านค่าผิดพลาดกำลังสองเฉลี่ย (Mean square error) หรือ MSE ของอัลกอริทึม LLMS Jo, et al. [3] นำเสนอการปรับปรุงอัลกอริทึม LLMS เพื่อการประยุกต์ใช้ในการประมาณช่องสัญญาณในระบบสื่อสารแบบ DS-CDMA Montillet & Yu [4] ได้นำอัลกอริทึม LLMS ไปประยุกต์ใช้ร่วมกับแบบจำลอง

Fractional Brownian motion เพื่อนำไปประมาณหาค่าตำแหน่งของเครื่องรับสัญญาณจากดาวเทียม GNSS Jeripotula, et al [5] ได้ทำการปรับปรุงอัลกอริทึม LLMS เพื่อการประยุกต์ใช้งานสำหรับอัลกอริทึมปรับตัวในระบบจัดรูปลำคลื่นแบบปรับตัว (Adaptive beamforming) ของระบบสายอากาศและ Zayyani, et al. [8] ได้นำอัลกอริทึม LLMS ไปประยุกต์ใช้กับระบบการประมาณหาเส้นทางในระบบโครงข่ายตัวตรวจรู้แบบไร้สาย (Wireless sensor network) เป็นต้น

ถึงแม้ว่าค่าตัวประกอบการรัวของอัลกอริทึม LLMS จะทำให้อัลกอริทึมปรับตัวอย่างมีประสิทธิภาพมากขึ้นเมื่อเปรียบเทียบกับอัลกอริทึม LMS แต่อย่างไรก็ตามค่าตัวประกอบการรัวจะส่งผลให้เกิดไบอัสที่เด่นชัดขึ้นที่สถานะอยู่ตัวแล้ว (Steady state) ของอัลกอริทึมทำให้อัลกอริทึม LLMS มีค่าการปรับผิด (Mis-adjustment) สูงกว่าอัลกอริทึม LMS ด้วยค่าขนาดขั้นของอัลกอริทึมที่เท่ากัน [1, 2] ที่ผ่านมา Loedwassana [6] ได้นำเสนออัลกอริทึม LMS ที่แปรค่าขนาดขั้นได้ (VS-LMS) โดยนำเสนอเพียงแนวคิดในหลักการเท่านั้นไม่ได้นำเสนอในเชิงวิเคราะห์คุณลักษณะทางสถิติของอัลกอริทึม และ Zhao, et al. [7] นำเสนออัลกอริทึม LLMS ชนิดแปรค่าขนาดขั้นได้ (VSS-LLMS) เมื่ออัลกอริทึมปรับตัวเข้าสู่สถานะอยู่ตัวแล้วขนาดขั้นของอัลกอริทึมจะถูกปรับให้มีขนาดเล็กลงตามฟังก์ชันผิวดลาดที่มีค่าลดลง ซึ่งจะส่งผลให้การปรับผิดของอัลกอริทึมมีค่าต่ำเมื่อเปรียบเทียบกับอัลกอริทึม LLMS และ LMS แต่อย่างไรก็ตามอัลกอริทึม VSS-LLMS มีความซับซ้อนของการคำนวณค่อนข้างสูง

บทความนี้ขอนำเสนออัลกอริทึมปรับสัมประสิทธิ์ของวงจรกรองแบบปรับตัวชนิด LLMS ที่แปรค่าขนาดขั้นได้ (VS-LLMS) ซึ่งอัลกอริทึมปรับค่าขนาดขั้นได้อาศัยหลักการจาก Loedwassana [6] โดยเกณฑ์การปรับตัวของอัลกอริทึมอยู่บนพื้นฐานของการสะสมค่าอัตราสัมพัทธ์ของฟังก์ชันผิวดลาดกำลังสอง ด้วยระเบียบวิธีดังกล่าวทำให้อัลกอริทึมที่นำเสนอมีความคงทนต่อสัญญาณรบกวนในระบบที่ติดกัวอัลกอริทึม VSS-LLMS พร้อมกันนั้นอัลกอริทึมยังมีความซับซ้อนของการคำนวณที่ต่ำกว่าอีกด้วย นอกจากนั้นในบทความนี้ยังได้นำเสนอการวิเคราะห์คุณลักษณะทางทฤษฎีของอัลกอริทึม VS-LLMS ภายใต้เงื่อนไขของระบบที่เป็นกระบวนการสุ่มแบบนิ่งทางสถิติ

วิธีดำเนินการวิจัย

1. อัลกอริทึม LLMS

อัลกอริทึมปรับตัวแบบ LMS ชนิดมีค่าการรัวหรือ LLMS เกิดจากการพิจารณาฟังก์ชันจุดประสงค์ (Cost function) ด้วยรูปแบบดังสมการ [1]

$$J(n) = e^2(n) + \gamma \mathbf{a}^T(n) \mathbf{a}(n) \quad (1)$$

เมื่อ $\mathbf{a}(n) = [a_0(n) \ a_1(n) \ a_2(n) \ \dots \ a_{L-1}(n)]^T$ คือเวกเตอร์ค่าสัมประสิทธิ์ของวงจรกรองแบบปรับตัว (Adaptive filter) L คือจำนวนสัมประสิทธิ์ $e(n)$ คือ สเกลาร์ของสัญญาณผิวดลาด γ คือ ตัวประกอบการรัวเป็นค่าคงที่ซึ่งมีค่าอยู่ในช่วง $0 < \gamma < 1$ และ n คือ ดัชนีเวลา (Time index) ของกระบวนการสุ่มจากฟังก์ชันข้างต้นจึงนำไปสู่อัลกอริทึมปรับตัวแบบ LLMS ได้ดังนี้ [1, 2]

$$\mathbf{a}(n+1) = \mathbf{a}(n) + \frac{\mu}{2} (-\nabla J(n)) = (1 - \gamma\mu) \mathbf{a}(n) + \mu e(n) \mathbf{x}(n) \quad (2)$$

เมื่อ $\mathbf{x}(n) = [x(n) \ x(n-1) \dots \ x(n-L+1)]^T$ คือ เวกเตอร์สัญญาณอินพุตของวงจรกรองแบบปรับตัว และ μ คือขนาดขั้น (Step size) การปรับค่าสัมประสิทธิ์ของอัลกอริทึม โดยอัลกอริทึม LLMS แบบทั่วไปจะมีขนาดขั้นเป็นสเกลาร์คงที่ ซึ่งจะเป็นค่าพารามิเตอร์สำคัญที่กำหนดเสถียรภาพและอัตราการลู่ของอัลกอริทึม [1] และจากสมการข้างต้นถ้ากำหนดให้ตัวประกอบปรับเท่ากับศูนย์ อัลกอริทึมจะกลายเป็น LMS ทั่วไป

2. อัลกอริทึม VS-LLMS ที่นำเสนอ

บทความนี้ขอเสนออัลกอริทึมปรับตัวของวงจรกรองแบบปรับตัวชนิด LLMS ที่แปรค่าขนาดขั้นของอัลกอริทึมได้ (Variable step-size LLMS) หรือ VS-LLMS ดังนี้

$$\mathbf{a}(n+1) = (1 - \gamma\mu(n))\mathbf{a}(n) + \mu(n)e(n)\mathbf{x}(n) \quad (3)$$

จากสมการข้างต้นจะเห็นได้ว่าขนาดขั้น $\mu(n)$ แปรค่าได้ตามเวลาไม่เป็นค่าคงที่ดังเช่นสมการที่ (2) กล่าวคือ ในช่วงการปรับตัวของอัลกอริทึมปรับสัมประสิทธิ์อยู่ที่สถานะชั่วคราว (Transient state) ขนาดขั้นจะมีค่าสูงเพื่อให้อัลกอริทึมปรับตัวมีอัตราการลู่เข้าสูง เมื่ออัลกอริทึมปรับตัวจนลู่เข้าสู่สถานะอยู่ตัวแล้วขนาดขั้นจะถูกแปรค่าให้มีขนาดต่ำๆ ส่งผลให้อัลกอริทึมปรับตัวช้าเพื่อให้ค่าสัมประสิทธิ์ที่อัลกอริทึมปรับได้มีค่าเข้าสู่คำตอบที่เหมาะสมที่สุด (Optimum solution) สำหรับอัลกอริทึมปรับค่าขนาดขั้นที่นำเสนอในบทความนี้สามารถแสดงดังสมการ [6]

$$\mu(n+1) = \alpha\mu(n) + \rho r(n) \quad (4)$$

เมื่อ

$$r(n) = \beta r(n-1) + (1 - \beta)\varepsilon^2(n) \quad (5)$$

และ

$$\varepsilon(n) = e(n)e(n-1) \quad (6)$$

ซึ่งขอบเขตของขนาดขั้นจะถูกกำหนดด้วยเงื่อนไข

$$\mu(n+1) = \begin{cases} \mu_{\max}, & \mu(n+1) > \mu_{\max} \\ \mu_{\min}, & \mu(n+1) < \mu_{\min} \\ \mu(n+1), & \text{Otherwise} \end{cases} \quad (7)$$

จากสมการข้างต้น ค่าพารามิเตอร์คงที่ต่างๆของอัลกอริทึมที่ควบคุมการถดถอยค่าและความราบเรียบของฟังก์ชันมีช่วงของการกำหนดค่าดังนี้ $0 < \alpha < 1$ โดย $\rho > 0$ และ $0 < \beta < 1$ ตามลำดับ โดยความซับซ้อนในการคำนวณของอัลกอริทึมเมื่อพิจารณาต่อวงรอบการคำนวณ (Iteration) สามารถแสดงเปรียบเทียบระหว่างอัลกอริทึม VS-LLMS ที่นำเสนอพิจารณาจากสมการที่ (3) – (6) และอัลกอริทึม VSS-LLMS ของ Zhao, et al. [7] พิจารณาจากสมการที่ (33) – (37) แสดงสรุปดังตารางที่ 1

Table 1 Computational complexity of VS-LLMS and VSS-LLMS

Algorithms	Additions	Multiplications	Divisions
VS-LLMS	$L + 3$	$2L + 8$	–
VSS-LLMS	$2L + 2$	$3L + 11$	1

เนื่องจากในบทความนี้จะทำการวิเคราะห์สมรรถนะของอัลกอริทึมที่นำเสนอด้วยการพิจารณาแบบจำลองทางการหาเอกลักษณ์ระบบ (System identification model) ที่มีคุณลักษณะทางสถิติของกระบวนการสุ่มแบบนิ่ง (Stationary random process) ซึ่งสัญญาณผิดพลาด $e(n)$ จากสมการที่ (3) และ (6) จะประกอบด้วย

$$e(n) = d(n) - y(n) \quad (8)$$

โดย

$$y(n) = \mathbf{a}^T(n)\mathbf{x}(n) \quad (9)$$

และ

$$d(n) = \mathbf{a}_o^T \mathbf{x}(n) + \eta(n) \quad (10)$$

เมื่อ $y(n)$ คือสเกลาร์ของสัญญาณเอาต์พุตของระบบปรับตัว $d(n)$ คือสเกลาร์ของผลตอบสนองที่ต้องการ (Desired response) $\mathbf{a}_o = [a_{o0} a_{o1} a_{o2} \dots a_{oL-1}]^T$ คือ เวกเตอร์สัมประสิทธิ์ของระบบที่ไม่ทราบค่า (Unknown system) และ $\eta(n)$ คือ สเกลาร์สัญญาณรบกวนในระบบที่เป็นกระบวนการสุ่มแบบเกาส์ (Gaussian process) มีค่าเฉลี่ยทางสถิติเท่ากับศูนย์และมีค่าความแปรปรวนทางสถิติ (Variance) เท่ากับ $\zeta_{\min}$ ซึ่งเป็นค่าผิดพลาดกำลังสองเฉลี่ยต่ำสุด (Minimum mean square error) ของระบบ สำหรับ $x(n)$ คือสัญญาณอินพุตของระบบที่เป็นกระบวนการสุ่มแบบมีสหสัมพันธ์ (Correlated process) ถูกสร้างจากแบบจำลองการถดถอยอัตโนมัติ (Autoregressive model) อันดับ 1 หรือ AR(1) ดังสมการ

$$x(n) = cx(n-1) + u(n) \quad (11)$$

เมื่อ c ($0 \leq c < 1$) คือ สัมประสิทธิ์การถดถอยของ AR(1) และ $u(n)$ เป็นกระบวนการสุ่มแบบเกาส์มีค่าเฉลี่ยทางสถิติเท่ากับศูนย์และค่าความแปรปรวนทางสถิติเท่ากับ σ_u^2 ตามลำดับ

2.1 การวิเคราะห์ค่าขนาดขั้นที่สถานะอยู่ตัวแล้ว

ในหัวข้อนี้จะเริ่มต้นด้วยการพิจารณาสมการที่ (5) ด้วยลำดับทางดัชนีเวลา $n = 0, 1, 2, \dots$ ซึ่งให้รูปแบบของสมการใหม่ได้ดังนี้

$$r(n) = (1 - \beta) \sum_{i=0}^n \beta^i \varepsilon^2(n-i) \quad (12)$$

และพิจารณาค่าเฉลี่ยทางสถิติของสมการได้เป็น

$$E[r(n)] = (1 - \beta) \sum_{i=0}^n \beta^i E[\varepsilon^2(n-i)] \quad (13)$$

นำสมการที่ (6) แทนค่าลงในสมการที่ (13) พร้อมทั้งอาศัยทฤษฎีบทการแยกตัวประกอบโมเมนต์และคุณลักษณะสหสัมพันธ์ข้ามทางสถิติของ $E[e(n)e(n-1)] \approx 0$ นำมาพิจารณา จึงให้คำตอบเป็น

$$E[r(n)] = (1 - \beta) \sum_{i=0}^n \beta^i \xi(n-i) \xi(n-i-1) \quad (14)$$

เมื่อ $\xi(n) = E[e^2(n)]$ คือ ค่าผิดพลาดกำลังสองเฉลี่ย (Mean square error) ของระบบที่ประกอบไปด้วยสองส่วนคือ $\xi(n) = \xi_{\min} + \xi_{\text{ex}}(n)$ โดย $\xi_{\text{ex}}(n)$ คือค่าผิดพลาดกำลังสองเฉลี่ยส่วนเกิน (Excess mean square error) จากนั้นนำสมการที่ (14) แทนค่ากลับในสมการที่ (4) พร้อมทั้งทำการพิจารณาสมการด้วยค่าเฉลี่ยทางสถิติได้ดังนี้

$$E[\mu(n+1)] = \alpha E[\mu(n)] + (1 - \beta) \rho \sum_{i=0}^n \beta^i \xi(n-i) \xi(n-i-1) \quad (15)$$

เนื่องจากระบบถูกพิจารณาคุณลักษณะทางสถิติด้วยกระบวนการสุ่มแบบนิ่ง ดังนั้นเมื่ออัลกอริทึมปรับตัวจนเข้าสู่สถานะอยู่ตัวแล้ว คุณสมบัติทางสถิติเหล่านี้สามารถถูกนำมาพิจารณาเพื่อวิเคราะห์หาค่าขนาดขั้นเฉลี่ยที่สถานะอยู่ตัวแล้วของอัลกอริทึมได้ นั่นคือ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[\mu(n+1)] = \lim_{n \rightarrow \infty} E[\mu(n)] = E[\mu(\infty)] \quad (16)$$

และ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \xi(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \xi(n-1) = \xi = \xi_{\min} + \xi_{\text{ex}} \quad (17)$$

จึงให้คำตอบของสมการที่ (15) เป็น

$$E[\mu(\infty)] = \frac{\rho \xi^2}{1 - \alpha} \quad (18)$$

แต่เนื่องจากเมื่ออัลกอริทึมปรับตัวจนเข้าสู่สถานะอยู่ตัวแล้วจะมีค่า $\xi_{\text{ex}} \ll \xi_{\min}$ ดังนั้นจึงสามารถแสดงค่าเฉลี่ยโดยประมาณของขนาดขั้นที่สถานะอยู่ตัวแล้วได้เป็น

$$E[\mu(\infty)] \approx \frac{\rho \xi_{\min}^2}{1 - \alpha} \quad (19)$$

จากสมการจะเห็นได้ว่าค่าขนาดขั้นที่สถานะอยู่ตัวแล้วของอัลกอริทึมจะมีขนาดขึ้นอยู่กับ 3 พารามิเตอร์คือ $\rho\alpha$ และกำลังเฉลี่ยของสัญญาณรบกวนในระบบ ($\xi_{\min}$) เพื่อเป็นการตรวจสอบความถูกต้องของผลจากการวิเคราะห์ทางทฤษฎีข้างต้นจึงทำการจำลองแบบการทำงานระบบตามหลักการในสมการที่ (3) – (11) แล้วนำค่าขนาดขั้นจากการปรับของอัลกอริทึมที่สถานะอยู่ตัวแล้วมาแสดงเปรียบเทียบกับผลจากการวิเคราะห์ทางทฤษฎีที่คำนวณจากสมการที่ (19) ด้วยค่าพารามิเตอร์เดียวกันกับการจำลองแบบ โดยจำแนกการพิจารณาเป็น 3 กรณีดังนี้

2.1.1 กรณีที่ 1: พิจารณาการแปรค่า μ ตามค่า $\zeta_{\min}$

กำหนดค่าพารามิเตอร์ในการทดสอบดังนี้ $\mathbf{a}_0 = [2 \ 1]^T c = 0.8 \sigma_u^2 = 1 \beta = 0.98 \alpha = 0.89 \rho = 1 \times 10^{-3} \gamma = 0.01$ และกำหนดค่าสัมประสิทธิ์เริ่มต้นของอัลกอริทึมปรับตัว $\mathbf{a}(0) = [20 \ -50]^T$ โดยทำการจำลองแบบอย่างอิสระ 50 ครั้ง ด้วยจำนวนตัวอย่าง (Samples) ของแต่ละครั้ง 10000 ตัวอย่างแล้วนำข้อมูลในตัวอย่างสุดท้าย (เป็นข้อมูลที่เข้าสู่สถานะอยู่ตัวแล้ว) ของการจำลองทั้งหมดเพื่อไปหาค่าเฉลี่ยเอน-เซมเบิลของค่าขนาดขั้นที่สถานะอยู่ตัวแล้วที่แปรตามค่า $\zeta_{\min}$ ซึ่งให้ผลแสดงเปรียบเทียบกันดังรูปที่ 1(a)

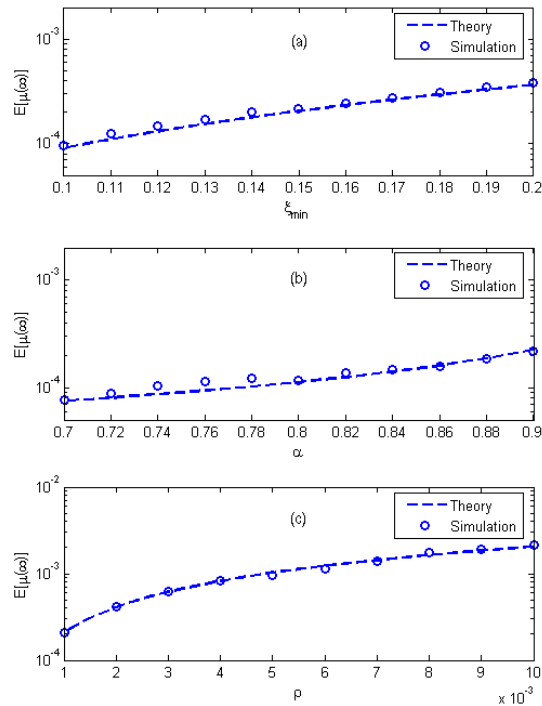


Figure 1 Steady state step size values comparison

2.1.2 กรณีที่ 2: พิจารณาการแปรค่า μ ตามค่า α

กำหนดค่าพารามิเตอร์ในการทดสอบดังนี้ $\mathbf{a}_0 = [2 \ 1]^T c = 0.8 \sigma_u^2 = 1 \beta = 0.98 \zeta_{\min} = 0.15 \rho = 1 \times 10^{-3} \gamma = 0.01$ และกำหนดค่าสัมประสิทธิ์เริ่มต้น $\mathbf{a}(0) = [20 \ -50]^T$ โดยทำการจำลองแบบอย่างอิสระ 50 ครั้ง ด้วยจำนวนตัวอย่างของแต่ละครั้ง 10 ตัวอย่าง 000 แล้วนำข้อมูลในตัวอย่างสุดท้ายของการจำลองทั้งหมดไปหาค่าเฉลี่ยเอนเซมเบิลของค่าขนาดขั้นที่สถานะอยู่ตัวแล้วที่แปรตามค่า α ซึ่งให้ผลแสดงเปรียบเทียบกันดังรูปที่ 1(b)

2.1.3 กรณีที่ 3: พิจารณาการแปรค่า μ ตามค่า ρ

กำหนดค่าพารามิเตอร์ในการทดสอบดังนี้ $\mathbf{a}_0 = [2 \ 1]^T c = 0.8 \sigma_u^2 = 1 \beta = 0.98 \zeta_{\min} = 0.15 \alpha = 0.89 \gamma = 0.01$ และกำหนดค่าสัมประสิทธิ์เริ่มต้น $\mathbf{a}(0) = [20 \ -50]^T$ โดยทำการจำลองแบบอย่างอิสระ 50 ครั้ง ด้วย

จำนวนตัวอย่างของแต่ละครั้ง 10000 ตัวอย่าง แล้วนำข้อมูลในตัวอย่างสุดท้ายของการจำลองทั้งหมดไปหาค่าเฉลี่ยเอนเซมเบิลของค่าขนาดขั้นที่สถานะอยู่ตัวแล้วที่แปรตามค่า ρ ซึ่งให้ผลแสดงเปรียบเทียบกันดังรูปที่ 1(c)

จากรูปที่ 1 ได้แสดงให้เห็นถึงความสอดคล้องกันระหว่างผลจากการจำลองแบบการทำงานระบบตามอัลกอริทึมที่นำเสนอกับผลจากการวิเคราะห์ทางทฤษฎีของสมการที่ (19) ถึงการแปรค่าขนาดขั้นเฉลี่ยที่สถานะอยู่ตัวแล้วของอัลกอริทึมตามการแปรค่าพารามิเตอร์ $\zeta_{\min}$, α และ ρ ตามลำดับ

2.2 การวิเคราะห์ค่าเฉลี่ยของอัลกอริทึมปรับตัว

หัวข้อนี้จะทำการพิจารณาค่าเฉลี่ยทางสถิติที่สถานะอยู่ตัวแล้วของอัลกอริทึมปรับสัมประสิทธิ์วงจรกรองแบบปรับตัวโดยนำสมการที่ (8) – (10) แทนค่าลงในสมการที่ (3) พร้อมทั้งกำหนดหลักเกณฑ์ในการพิจารณาดังนี้ ระบบเป็นกระบวนการสุ่มแบบนิ่งโดยระหว่างอัลกอริทึมปรับสัมประสิทธิ์ $a(n)$ อัลกอริทึมปรับขนาดขั้น $\mu(n)$ และสัญญาณอินพุต $x(n)$ จะมีคุณลักษณะทางสถิติของกระบวนการสุ่มที่เป็นอิสระแก่กัน (Independence process) ขณะที่กระบวนการเหล่านี้จะมีคุณลักษณะทางสถิติของกระบวนการสุ่มที่เป็นออร์ทอกอนัล (Orthogonal process) กับสัญญาณรบกวน $\eta(n)$ ดังนั้นจึงสามารถพิจารณาค่าเฉลี่ยของอัลกอริทึมปรับตัวได้ดังนี้

$$E[\mathbf{a}(n+1)] = (1 - \gamma E[\mu(n)]) E[\mathbf{a}(n)] - E[\mu(n)] \mathbf{R} E[\mathbf{v}(n)] \quad (20)$$

เมื่อ $\mathbf{v}(n) = \mathbf{a}(n) - \mathbf{a}_o$ คือ เวกเตอร์การเบี่ยงเบนค่าสัมประสิทธิ์ของวงจรกรองแบบปรับตัวที่เบี่ยงเบนจากค่าสัมประสิทธิ์ของระบบที่ไม่ทราบค่าซึ่งจะเป็นคำตอบของอัลกอริทึมปรับตัว และ $\mathbf{R}$ คือเมตริกซ์ค่าอัตโนมัติสหสัมพันธ์ของสัญญาณอินพุต $x(n)$ กล่าวคือ

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} g(0) & g(1) & g(2) & \cdots & g(L-1) \\ g(1) & g(0) & g(1) & \cdots & g(L-2) \\ g(2) & g(1) & g(0) & \cdots & g(L-3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g(L-1) & g(L-2) & g(L-3) & \cdots & g(0) \end{bmatrix} \quad (21)$$

โดยที่

$$g(l) = E[x(n)x(n-l)] = \frac{c^l \sigma_u^2}{1 - c^2} \quad (22)$$

เมื่อ $l = 0, 1, 2, \dots, L-1$ จากนั้นจัดรูปสมการที่ (20) ให้อยู่ในรูปของสมการค่าการเบี่ยงเบนสัมประสิทธิ์เฉลี่ยนั้นคือ

$$E[\mathbf{v}(n+1)] = \{\mathbf{I} - E[\mu(n)](\mathbf{R} + \gamma \mathbf{I})\} E[\mathbf{v}(n)] - \gamma E[\mu(n)] \mathbf{a}_o \quad (23)$$

เมื่อ $\mathbf{I}$ คือ เมทริกซ์เอกลักษณ์ (Identity matrix) จากนั้นอาศัยคุณสมบัติของ $\mathbf{v}'(n) = \mathbf{Q}^T \mathbf{v}(n)$ $\mathbf{R} = \mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}^T$ และ $\mathbf{a}'_o = \mathbf{Q}^T \mathbf{a}_o$ เพื่อทำการย้ายแกนของเวกเตอร์บนฟังก์ชันค่าผิดพลาดกำลังสองเฉลี่ยเพื่อนำไปสู่การหารากของสมการ

$$E[\mathbf{v}'(n+1)] = \{\mathbf{I} - E[\mu(n)](\mathbf{\Lambda} + \gamma\mathbf{I})\} E[\mathbf{v}'(n)] - \gamma E[\mu(n)]\mathbf{a}'_o \quad (24)$$

โดยที่ $\mathbf{\Lambda}$ คือเมทริกซ์ค่าเจาะจง (Eigenvalue matrix) และ $\mathbf{Q}$ เป็นเมทริกซ์ของเวกเตอร์เจาะจง

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_{L-1} \end{bmatrix} \quad (25)$$

เมื่อทำการพิจารณาสมการที่ (24) ด้วยลำดับของดัชนีเวลาก็คือ $n = 0, 1, 2, \dots$ ทำให้สามารถแสดงสมการค่าเบี่ยงเบนสัมประสิทธิ์เฉลี่ยในรูปแบบของสมการสถานะ (State equation) ได้ดังนี้

$$E[\mathbf{v}'(n)] = \left(\prod_{k=0}^{n-1} \mathbf{I} - E[\mu(k)](\mathbf{\Lambda} + \gamma\mathbf{I}) \right) E[\mathbf{v}'(0)] - \gamma(\mathbf{\Lambda} + \gamma\mathbf{I})^{-1} \mathbf{a}'_o \quad (26)$$

$$\text{โดย} \quad \mathbf{v}'(0) = \mathbf{a}'(0) - [\mathbf{I} - \gamma(\mathbf{\Lambda} + \gamma\mathbf{I})^{-1}] \mathbf{a}'_o \quad (27)$$

จากสมการที่ (26) แสดงให้เห็นว่าอัลกอริทึมปรับตัวแบบ VS-LLMS ที่นำเสนอจะเกิดการเข้าสู่สถานะอยู่ตัวแล้วให้ค่าสัมประสิทธิ์เข้าสู่ค่าที่เหมาะสมที่สุดได้นั้น ค่าในวงเล็บของพจน์แรกจะต้องเป็นไปตามเงื่อนไข

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=0}^{n-1} [\mathbf{I} - E[\mu(k)](\mathbf{\Lambda} + \gamma\mathbf{I})] = 0 \quad (28)$$

นั่นหมายถึงค่าที่อยู่ในวงเล็บมีค่าน้อยกว่าหนึ่งและมีขนาดลดลงตามเวลาแบบเอกซ์โพเนนเชียล กล่าวคือ

$$|1 - E[\mu(n)](\lambda_i + \gamma)| < 1$$

$\lambda_i (i = 0, 1, 2, \dots, L-1)$ คือ ค่าเจาะจงใด ๆ ของเมทริกซ์ $\mathbf{R}$ และจากสมการข้างต้นทำให้สามารถกำหนดเงื่อนไขขอบเขตของเสถียรภาพอัลกอริทึมปรับตัวแบบ VS-LLMS ได้เป็น

$$0 < E[\mu(n)] < \frac{2}{\lambda_{\max} + \gamma} \quad (29)$$

เมื่อ $\lambda_{\max}$ คือ ค่าเจาะจงสูงสุดของเมทริกซ์ $\mathbf{R}$ และเนื่องจากพฤติกรรมการลดค่าลงของพจน์ข้างต้นเป็นแบบเอกซ์โพเนนเชียล ดังนั้นจึงสามารถประมาณค่าพจน์ข้างต้นด้วยฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลเพื่อนำไปสู่การสืบหาคำตอบค่าคงตัวเวลา (Time constant) ที่สถานะชั่วคราวของอัลกอริทึมปรับตัวดังนี้

$$1 - E[\mu(n)](\lambda_i + \gamma) \approx e^{-n/\tau_i} \approx 1 - \frac{1}{\tau_i}$$

$$\text{ดังนั้นจึงให้} \quad \tau_i \approx \frac{1}{E[\mu(n)](\lambda_i + \gamma)} \quad (30)$$

จากสมการข้างต้นแสดงให้เห็นว่าค่าตัวประกอบการรั่วที่ถูกรวมเข้ากับค่าเจาะจงจะส่งผลให้ค่าคงตัวเวลาของการปรับตัวอัลกอริทึมที่สถานะชั่วคราวมีค่าลดลง นั่นหมายถึงอัตราการลู่ของอัลกอริทึมแบบแปรค่าขนาดขั้นได้จะถูกทำให้มีค่าเพิ่มขึ้นด้วยตัวประกอบการรั่ว

จากสมการที่ (26) เมื่อเงื่อนไขทางเสถียรภาพของอัลกอริทึมเป็นไปตามสมการที่ (29) จะส่งผลให้อัลกอริทึมปรับตัวลู่เข้าสู่สถานะอยู่ตัวตามเงื่อนไขในสมการที่ (28) ด้วยเหตุนี้จึงสามารถพิจารณาสมการค่าเบี่ยงเบนสัมประสิทธิ์เฉลี่ยที่สถานะอยู่ตัวแล้วของอัลกอริทึมได้ดังสมการ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[\mathbf{v}'(n)] = E[\mathbf{v}'(\infty)] = -\gamma(\mathbf{\Lambda} + \gamma\mathbf{I})^{-1}\mathbf{a}'_o$$

$$\text{หรือ} \quad E[\mathbf{v}(\infty)] = -\gamma(\mathbf{R} + \gamma\mathbf{I})^{-1}\mathbf{a}_o \quad (31)$$

จากนั้นทำการจำลองแบบการทำงานของระบบแล้วนำผลของค่าเบี่ยงเบนสัมประสิทธิ์เฉลี่ยที่สถานะอยู่ตัวแล้วมาเปรียบเทียบกับผลจากการคำนวณด้วยสมการที่ (31) เพื่อตรวจสอบความถูกต้องของผลจากการวิเคราะห์ทางทฤษฎีข้างต้น โดยพิจารณาอยู่ในรูปของค่า $\|\mathbf{v}(n)\|$ ที่แปรค่าตามพารามิเตอร์ต่างๆ จำแนกเป็น 3 กรณีดังนี้

2.2.1 กรณีที่ 1: พิจารณาการแปรค่า $\|\mathbf{v}(n)\|$ ตามค่า γ

กำหนดค่าพารามิเตอร์ในการทดสอบดังนี้ $\mathbf{a}_o = [2 \ 1]^T$, $c = 0.8$, $\sigma_u^2 = 1$, $\xi_{\min} = 0.15$, $\beta = 0.98$, $\alpha = 0.89$, $\rho = 1 \times 10^{-3}$ และค่าสัมประสิทธิ์เริ่มต้นของอัลกอริทึม $\mathbf{a}(0) = [20 \ -50]^T$ โดยทำการจำลองแบบอย่างอิสระ 50 ครั้ง ด้วยจำนวนตัวอย่างของแต่ละครั้ง 10000 ตัวอย่าง แล้วนำข้อมูลในตัวอย่างสุดท้ายของการจำลองทั้งหมดไปหาค่าเฉลี่ยเอนเซมเบิลของค่า $\|\mathbf{v}(n)\|$ ที่สถานะอยู่ตัวแล้วที่แปรตามค่า γ ซึ่งให้ผลแสดงเปรียบเทียบกันดังรูปที่ 2(a)

2.2.2 กรณีที่ 2: พิจารณาการแปรค่า $\|\mathbf{v}(n)\|$ ตามค่า c

กำหนดค่าพารามิเตอร์ในการทดสอบดังนี้ $\mathbf{a}_o = [2 \ 1]^T$, $\gamma = 0.01$, $\sigma_u^2 = 1$, $\xi_{\min} = 0.15$, $\beta = 0.98$, $\alpha = 0.89$, $\rho = 1 \times 10^{-3}$ และค่าสัมประสิทธิ์เริ่มต้นของอัลกอริทึม $\mathbf{a}(0) = [20 \ -50]^T$ โดยทำการจำลองแบบอย่างอิสระ 50 ครั้ง ด้วยจำนวนตัวอย่างของแต่ละครั้ง 10000 ตัวอย่าง แล้วนำข้อมูลในตัวอย่างสุดท้ายของการจำลองทั้งหมดไปหาค่าเฉลี่ยเอนเซมเบิลของค่า $\|\mathbf{v}(n)\|$ ที่สถานะอยู่ตัวแล้วที่แปรตามค่า c ซึ่งให้ผลแสดงเปรียบเทียบกันดังรูปที่ 2(b)

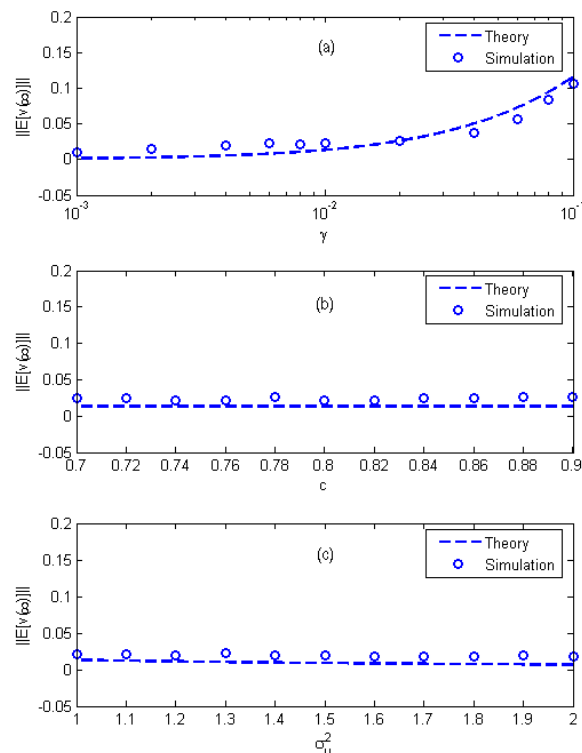


Figure 2 Comparison of $\|v(n)\|$ as a function of examined parameters

2.2.3 กรณีที่ 3: พิจารณาการแปรค่า $\|v(n)\|$ ตามค่า σ_u^2

กำหนดค่าพารามิเตอร์ในการทดสอบดังนี้ $\mathbf{a}_0 = [2 \ 1]^T$, $c = 0.8$, $\gamma = 0.01$, $\beta = 0.98$, $\xi_{\min} = 0.15$, $\alpha = 0.89$, $\rho = 1 \times 10^{-3}$ และกำหนดค่าสัมประสิทธิ์เริ่มต้น $\mathbf{a}(0) = [20 \ -50]^T$ โดยทำการจำลองแบบอย่างอิสระ 50 ครั้ง ด้วยจำนวนตัวอย่างของแต่ละครั้ง 10000 ตัวอย่าง แล้วนำข้อมูลในตัวอย่างสุดท้ายของการจำลองทั้งหมดไปหาค่าเฉลี่ยเอนเซมเบิลของค่า $\|v(n)\|$ ที่สถานะอยู่ตัวแล้วที่แปรตามค่า σ_u^2 ซึ่งให้ผลแสดงเปรียบเทียบกันดังรูปที่ 2(c)

จากรูปที่ 2 แสดงให้เห็นถึงความสอดคล้องกันระหว่างผลจากการจำลองแบบการทำงานของระบบตามอัลกอริทึมที่นำเสนอกับผลจากการวิเคราะห์ทางทฤษฎีของสมการที่ (31) ถึงการแปรค่า $\|v(n)\|$ เฉลี่ยที่สถานะอยู่ตัวแล้วของอัลกอริทึมตามการแปรค่าพารามิเตอร์ γc และ σ_u^2 ตามลำดับ

ผลการวิจัย

หัวข้อนี้จะทำการจำลองแบบการทำงานของระบบเพื่อพิจารณาพฤติกรรมการลู่ค่าของอัลกอริทึมปรับตัว โดยกำหนดค่าสัมประสิทธิ์ของระบบไม่ทราบค่าและค่าพารามิเตอร์ในกระบวนการสุ่มเหมือนกับหัวข้อก่อน

หน้ากล่าวคือ $\mathbf{a}_o = [2 \ 1]^T$ กำหนดให้ $\sigma_u^2 = 1$ $c = 0.8$ และ $\zeta_{\min} = 0.15$ ตามลำดับ โดยจำแนกการพิจารณาเป็น 2 กรณี ดังนี้

1. กรณีที่ 1: พิจารณาพฤติกรรมการลู่ค่า μ และค่าสัมประสิทธิ์ของอัลกอริทึมที่นำเสนอต่อการเปลี่ยนค่า γ เป็นสามค่า คือ 0, 0.05 และ 0.1 ตามลำดับ โดยการลู่ค่าสัมประสิทธิ์จะพิจารณาอยู่ในรูปแบบของค่าความเบี่ยงเบนกำลังสองเฉลี่ย (Mean square deviation) หรือ MSD ตามสมการที่ (32)

$$MSD = E \|\mathbf{a}(n) - \mathbf{a}_o\|^2 \quad (32)$$

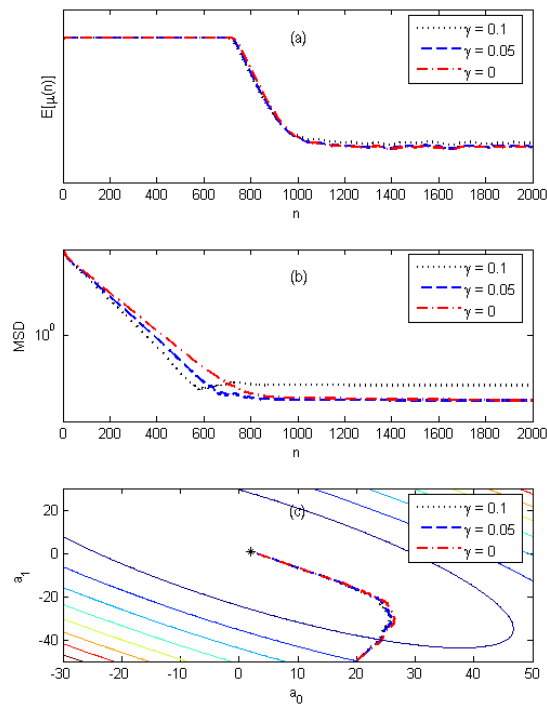


Figure 3 Convergence of u and proposed algorithm parameters

กำหนดค่าพารามิเตอร์ต่างๆ ในการจำลองแบบของอัลกอริทึมปรับตัวที่นำเสนอดังนี้ $\alpha = 0.89$ $\beta = 0.98$ $\rho = 1 \times 10^{-3}$ $\mu_{\max} = 0.016$ และค่าสัมประสิทธิ์เริ่มต้นของอัลกอริทึม $\mathbf{a}(0) = [20 \ -50]^T$ ทำการจำลองแบบอย่างอิสระ 50 ครั้ง ด้วยจำนวนตัวอย่างของแต่ละครั้ง 2000 ตัวอย่าง แล้วนำทั้งหมดไปหาค่าเฉลี่ยเอนเซมเบิลของค่า μ และ MSD ตามลำดับ โดยให้ผลจากการจำลองแบบการทำงานของอัลกอริทึมที่นำเสนอแสดงดังรูปที่ 3

รูปที่ 3(a) แสดงขนาดขั้นเฉลี่ยของอัลกอริทึม VS-LLMS ที่แปรค่าตามเวลาซึ่งจะเห็นได้ว่าในช่วงสถานะชั่วคราวของอัลกอริทึมขนาดขั้นจะถูกปรับให้มีค่าสูง โดยจะถูกปรับลดค่าลงเมื่ออัลกอริทึมเริ่มลู่เข้าสู่สถานะอยู่ตัวและถูกปรับให้มีค่าต่ำสุดเมื่ออัลกอริทึมปรับตัวอยู่ในสถานะอยู่ตัวแล้ว ($n > 1000$ samples)

รูปที่ 3(b)แสดงค่า MSD ที่แปรตามเวลาซึ่งจะเห็นได้ว่าที่สถานะชั่วคราวของอัลกอริทึม เมื่อกำหนด $\gamma = 0.1$ อัลกอริทึมจะมีอัตราการลู่ที่สูงกว่าเมื่อกำหนด $\gamma = 0$ (อัลกอริทึม VS-LMS) แต่เมื่อพิจารณาที่สถานะอยู่ตัวแล้วจะพบว่าการกำหนด $\gamma = 0.1$ อัลกอริทึมจะมีค่า MSD ที่สูงกว่าการกำหนด $\gamma = 0$ เนื่องจากค่า γ ที่มีค่ามากจะส่งผลโดดเด่นขึ้นต่อการเกิดไบอัสที่สถานะอยู่ตัวของอัลกอริทึม และจากรูปจะเห็นได้ว่าการกำหนด $\gamma = 0.05$ จะให้สมรรถนะของอัลกอริทึมดีที่สุด

รูปที่ 3(c) แสดงพฤติกรรมของการลู่สัมประสิทธิ์บนพื้นผิวฟังก์ชันผิดพลาดกำลังสองเฉลี่ยจากการปรับด้วยอัลกอริทึม VS-LLMS ที่นำเสนอจากค่าเริ่มต้น $\mathbf{a}(0) = [20 \ -50]^T$ จนถึงค่าเหมาะที่สุดคือ $\mathbf{a}_o = [2 \ 1]^T$

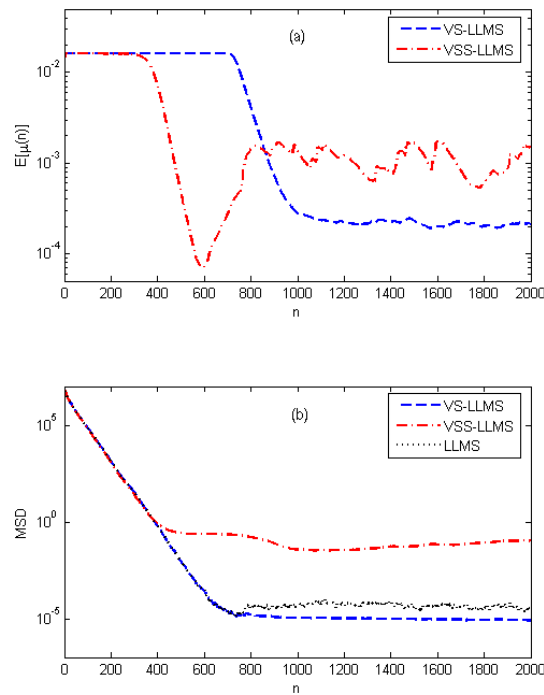


Figure 4 Convergence of the proposed algorithm for $\mathbf{a}(0) = [20 \ -50]^T$

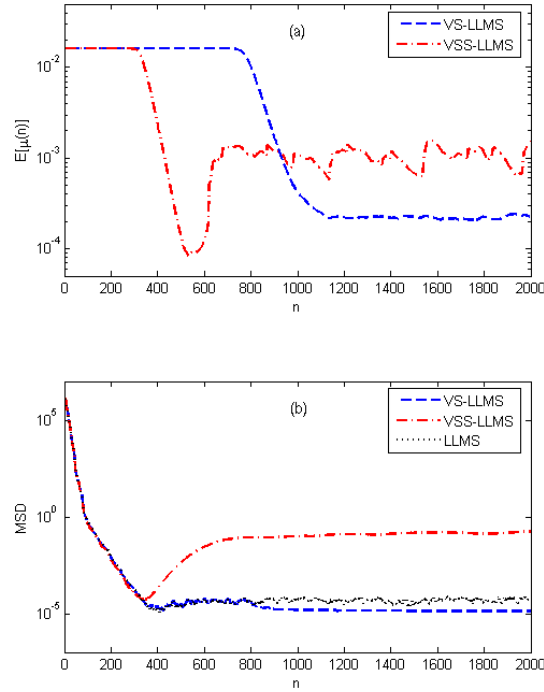


Figure 5 Convergence of the proposed algorithm for $\mathbf{a}(0) = [-30 \ -30]^T$

2. กรณีที่ 2: พิจารณาพฤติกรรมการลู่ค่า μ และค่าสัมประสิทธิ์ของอัลกอริทึมที่นำเสนอเปรียบเทียบกับอัลกอริทึม LLMS แบบทั่วไปดังสมการที่ (2) และอัลกอริทึม VSS-LLMS ของ Zhao, et al. [7] โดยอัลกอริทึม VSS-LLMS มีรูปแบบดังนี้

$$\mathbf{a}(n+1) = \gamma \mathbf{a}(n) + \mu(n)e(n)\mathbf{x}(n) \quad (33)$$

โดยที่
$$\mu(n+1) = \alpha \mu(n) + v q^2(n) \quad (34)$$

เมื่อ
$$q(n) = p(n)r(n) \quad (35)$$

$$p(n) = \beta p(n-1) + (1-\beta)e(n)e(n-1) \quad (36)$$

และ
$$r(n) = \beta r(n-1) + (1-\beta) \frac{e^2(n)}{\mathbf{x}^T(n)\mathbf{x}(n)} \quad (37)$$

2.1 กำหนดค่าพารามิเตอร์ต่างๆ ในการจำลองแบบระบบเหมือนกับกรณีที่ 1 โดยอัลกอริทึมปรับตัวที่นำเสนอ (VS-LLMS) กำหนดค่าพารามิเตอร์ต่างๆ ดังนี้ $\gamma = 0.05$ $\alpha = 0.89$ $\beta = 0.98$ $\rho = 1 \times 10^{-3}$ $\mu_{\max} = 0.016$ สำหรับอัลกอริทึม VSS-LLMS จะกำหนดค่าพารามิเตอร์ของอัลกอริทึมตาม Zhao, et al. [7] ดังนี้

$\gamma = 0.999$ $\alpha = 0.97$ $\beta = 0.98$ $\nu = 8 \times 10^{-5}$ $\mu_{\max} = 0.016$ และอัลกอริทึม LLMS กำหนดให้ $\gamma = 0.05\mu = \mu_{\max}$ กำหนดค่าสัมประสิทธิ์เริ่มต้นของทั้งสามอัลกอริทึมด้วยค่า $\mathbf{a}(0) = [20 \ -50]^T$ ทำการจำลองแบบอย่างอิสระ 50 ครั้ง ด้วยจำนวนตัวอย่างของแต่ละครั้ง 2000 ตัวอย่าง แล้วนำทั้งหมดไปหาค่าเฉลี่ยเอนเซมเบิลของค่า μ และ MSD ตามลำดับ โดยให้ผลจากการจำลองแบบการทำงานของทั้งสามอัลกอริทึมแสดงเปรียบเทียบดังรูปที่ 4 และทั้งสามอัลกอริทึมมีพฤติกรรมการลู่ค่าสัมประสิทธิ์บนพื้นผิวฟังก์ชันผิดพลาดกำลังสองเฉลี่ยแสดงเปรียบเทียบกันดังรูปที่ 6(a)

2.2 กำหนดค่าสัมประสิทธิ์เริ่มต้นของทั้งสามอัลกอริทึมด้วยค่า $\mathbf{a}(0) = [-30 \ -30]^T$ สำหรับค่าพารามิเตอร์ต่าง ๆ ของทั้งสามอัลกอริทึมกำหนดเหมือนกับหัวข้อ 2.1 จากนั้นทำการจำลองแบบอย่างอิสระ 50 ครั้ง ด้วยจำนวนตัวอย่างของแต่ละครั้ง 2000 ตัวอย่าง แล้วนำทั้งหมดไปหาค่าเฉลี่ยเอนเซมเบิลของค่า μ และ MSD ตามลำดับ ให้ผลจากการจำลองแบบการทำงานของทั้งสามอัลกอริทึมแสดงเปรียบเทียบดังรูปที่ 5 และแสดงพฤติกรรมการลู่ค่าสัมประสิทธิ์บนพื้นผิวฟังก์ชันผิดพลาดในรูปที่ 6(b)

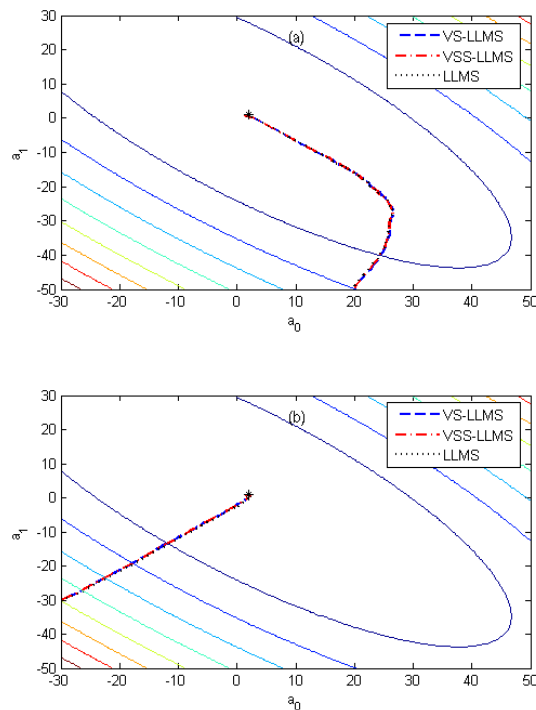


Figure 6 Convergence behaviors of coefficients on error surface

จากรูปที่ 4 และรูปที่ 5 จะเห็นได้ว่าอัลกอริทึม VS-LLMS ที่นำเสนอจะให้สมรรถนะที่ดีกว่าอัลกอริทึม VSS-LLMS ของบทความที่[7] และอัลกอริทึม LLMS แบบทั่วไปตามสมการที่ (2) กล่าวคืออัลกอริทึม VS-LLMS จะมีค่า MSD ที่สถานะอยู่ตัวแล้วต่ำที่สุด แต่สำหรับอัลกอริทึม VSS-LLMS จะมีสมรรถนะแย่ที่สุดเนื่องจากอัลกอริทึมปรับขนาดขั้น μ มีความคงทนต่อสัญญาณรบกวนในระบบค่อนข้างต่ำ

เมื่ออัลกอริทึมปรับตัวจนเข้าสู่สถานะอยู่ตัวแล้วยังคงให้ค่าขนาดขั้นมีค่าสูงกว่าอัลกอริทึม VS-LLMS ที่นำเสนอ จึงส่งผลให้ค่า MSD ที่สถานะอยู่ตัวแล้วของอัลกอริทึมปรับสัมประสิทธิ์มีค่าสูงกว่า VS-LLMS และ LLMS ซึ่งมีค่าขนาดขั้นคงที่ไม่แปรค่าตามเวลา

อภิปรายและสรุปผลการวิจัย

บทความนี้ได้นำเสนออัลกอริทึมปรับตัวแบบ VS-LLMS สำหรับปรับค่าสัมประสิทธิ์ของวงจรกรองแบบปรับตัวซึ่งอัลกอริทึมปรับขนาดขั้นมีเกณฑ์การปรับตัวอยู่บนพื้นฐานของการสะสมค่าอัตราสัมพัทธ์ของฟังก์ชันผิดพลาดกำลังสอง โดยอัลกอริทึมที่นำเสนอมีความซับซ้อนของการคำนวณที่ต่ำกว่าอัลกอริทึม VSS-LLMS ของ Zhao, et al. [7] นอกจากนั้นในบทความนี้ยังได้นำเสนอการวิเคราะห์คุณลักษณะทางสถิติที่สถานะอยู่ตัวแล้วของอัลกอริทึมด้วยแบบจำลองทางการหาเอกลักษณ์ระบบภายใต้กระบวนการสุ่มแบบนิ่งทางสถิติ ผลจากการจำลองแบบการทำงานของระบบของอัลกอริทึมที่นำเสนอให้ผลลัพธ์สอดคล้องกับผลจากการคำนวณทางทฤษฎีซึ่งเป็นเครื่องยืนยันถึงความถูกต้องของหลักการวิเคราะห์ทางทฤษฎีที่นำเสนอ และจากการจำลองแบบการทำงานของอัลกอริทึมที่นำเสนอเปรียบเทียบกับอัลกอริทึม VSS-LLMS และอัลกอริทึม LLMS แบบทั่วไปพบว่าอัลกอริทึมที่นำเสนอให้สมรรถนะที่ดีกว่าอัลกอริทึมทั้งสองเนื่องจากให้ค่า MSD ที่สถานะอยู่ตัวแล้วมีค่าต่ำที่สุด

References

- [1] Hayes, M. H. (1996). *Statistical Digital Signal Processing and Modeling*. New York: John Wiley & Sons, Inc.
- [2] Mayyas, K. & Aboulnasr, T. (1997). Leaky LMS algorithm: MSE Analysis for Gaussian Data. *IEEE Transactions on Signal Processing.*, 45(4), 927–934.
- [3] Jo, S., et al. (2002). Modified Leaky LMS Algorithm for Channel Estimation in DS – CDMA Systems. *IEEE Communications Letters*, 6(5), 202–204.
- [4] Montillet, J. P. & Yu, K. (2011). Leaky LMS Algorithm and Fractional Brownian Motion Model for GNSS Receiver Position Estimation. In *2011 IEEE 74th Vehicular Technology Conference* (p. 1-5). 5-8 September, 2011, San Fransisco, California, USA.
- [5] Jeripotula, P. R., et al. (2019). Modified Leaky LMS Algorithm for Adaptive Beamforming. *International Journal of Engineering, Applied and Management Sciences Paradigms*, 54(3), 212–218.
- [6] Loedwassana, W. (2019). A Variable Step Size Algorithm of LMS Algorithm Based on Squared Autocorrelation Criterion. In *The 7th International Electrical Engineering Congress* (p. DSP 37–DSP 40). 6–8 March, 2019, Prachuap Khiri Khan, Thailand.
- [7] Zhao, S., et al. (2021). A Variable Step-Size Leaky LMS Algorithm. *Wireless Communication and Mobile Computing*, 2021, 7951643.
- [8] Zayyani, H., et al. (2024). Hidden Markov Model Decorrelated Diffusion Leaky LMS with Optimized Leaky Factor. *IEEE Access*, 12, 39804–39810.