JSET-RMU
Journal of Science, Engineering, and Technology
Rajabhat Maha Sarakham University
https://ph03.tci-thaijo.org/index.php/jsetRMU

บทความวิจัย (Research Article) Volume 4, No 1, January – June 2025, ISSN : 2821-9066 (Print)

อุดมคติ KU-ปริยายบวกวิภัชนัยของพีชคณิต KU

Fuzzy KU-Positive Implicative Ideals of KU-Algebras

อัฐชัย ชฎา* กรรณิการ์ จุใจล้ำ และ วีรพงษ์ วงศ์พินิจ
Atthchai Chada*, Kannika Jujailum and Weerapong Wongpinit

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Rajabhat Maha Sarakham University
*Corresponding author e-mail: atthchaichada@gmail.com

Received: May 24, 2025/ **Revised:** July 3, 2025/ **Accepted:** July 4, 2025

บทคัดย่อ

ในงานวิจัยนี้ เราได้เสนอแนวคิดของ อุดมคติ KU-ปริยายบวกวิภัชนัยของพีชคณิต KU และ ศึกษาสมบัติพื้นฐานหลายประการที่เกี่ยวข้อง นอกจากนี้ เรายังได้ศึกษาความสัมพันธ์ระหว่าง อุดมคติ KU-ปริยายบวกของพีชคณิต KU และ อุดมคติ KU-ปริยายบวกวิภัชนัยของพีชคณิต KU

คำสำคัญ: พีชคณิต KU; อุดมคติ KU; อุดมคติ KU วิภัชนัย; อุดมคติปริยาย; อุดมคติปริยายบวก

Abstract

In this research, we introduce the concept of fuzzy KU-positive implicative ideals in KU-algebras and study several fundamental properties related to them. Furthermore, we investigate the relationship between KU- positive implicative ideals and fuzzy KU-positive implicative ideals in KU-algebras.

Keywords: KU-Algebras; KU-Ideals; Fuzzy KU-Ideals; Implicative Ideals; Positive Implicative Ideals

บทนำ

แนวคิดของเซตวิภัชนัย (fuzzy set) ถูกแนะนำขึ้นครั้งแรกโดย Zadeh (1965) ต่อมา Rosenfeld (1971) เป็นคนแรกที่ได้ประยุกต์แนวคิดของเซตวิภัชนัยกับโครงสร้างทางพีชคณิตต่างๆ และได้แนะนำแนวคิดของกรุปวิภัชนัย (fuzzy group) และ Iseki (1975) ได้แนะนำแนวคิดของพีชคณิต BCK และอุดมคติของพีชคณิต BCK หลังจากนั้น Xi (1991) ได้

ประยุกต์แนวคิดของอุดมคติของพีชคณิต BCK กับเซตวิภัชนัย และเขาได้แนะนำแนวคิดอุดมคติวิภัชนัย (fuzzy ideal) ของพีชคณิต BCK ต่อมา Prabpayak and Leerawat (2009a) ได้เสนอพีชคณิตตัวใหม่ชื่อว่า พีชคณิต KU และได้ศึกษาสมบัติพื้นฐานที่สำคัญไว้ จากนั้น Mostafa, Abd-Elnaby, and Yousef (2011) ได้ประยุกต์แนวคิดของเซตวิภัชนัยกับอุดมคติของพีชคณิต KU และได้แนะนำแนวคิดของอุดมคติวิภัชนัยของพีชคณิต KU

ในงานวิจัยนี้ เราได้แนะนำแนวคิดของ อุดมคติ KU-ปริยายบวกวิภัชนัยของพีชคณิต KU และ ศึกษาสมบัติพื้นฐานหลายประการที่เกี่ยวข้องและยังศึกษาสมบัติบางประการของอุดมคติ KU-ปริยายบวกของพีชคณิต KU นอกจากนี้ เรายังได้ศึกษาความสัมพันธ์ระหว่าง อุดมคติ KU-ปริยายบวกของพีชคณิต KU และ อุดมคติ KU-ปริยายบวกวิภัชนัยของพีชคณิต KU

บทนิยาม 1.1 (Prabpayak & Leerawat, 2009a) ให้ X เป็นเซตใดๆที่ไม่เป็นเซตว่างและ $*$ เป็นการดำเนินการทวิภาคบน X และ $0 \in X$ จะเรียก $(X,*,0)$ ว่า **พีชคณิต KU** (KU-Algebras) ถ้าสอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้สำหรับทุกๆ $x,y,z \in X$

(ku1). $(x*y)*[(y*z)*(x*z)]=0$

(ku2). $x*0=0$

(ku3). $0*x=x$

(ku4). ถ้า $x*y=0=y*x$ แล้ว $x=y$

หมายเหตุ เพื่อความสะดวกจะเขียน X แทน $(X,*,0)$ เป็น พีชคณิต KU และนิยามความสัมพันธ์ $\le$ บน X โดย $x \le y$ ก็ต่อเมื่อ $y*x=0$ สำหรับทุกๆ $x,y \in X$ และถ้าแทน $y=x=0$ ใน (ku1) จะได้ (ku5); $z*z=0$ และจาก (ku2) จะได้ $(\mathrm{ku}2')$; $0 \le x$

บทนิยาม 1.2 (Prabpayak & Leerawat, 2009b) ให้ X เป็นพีชคณิต KU และ I เป็นเซตย่อยที่ไม่เป็นเซตว่างของ X จะเรียก I ว่า **อุดมคติ KU** (KU ideal) ของ X ถ้าสอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้สำหรับทุกๆ $x,y,z \in X$

1). $0 \in I$

2). ถ้า $x*(y*z) \in I$ และ $y \in I$ แล้ว $x*z \in I$

บทนิยาม 1.3 (Zadeh, 1965) ให้ X เป็นเซตใดๆที่ไม่เป็นเซตว่างจะเรียกฟังก์ชัน $\mu : X \to [0,1]$ ว่า **เซตวิภัชนัย** (fuzzy set) ของ X

บทนิยาม 1.4 (Zadeh, 1965) ให้ X เป็นเซตใดๆและ μ เป็นเซตวิภัชนัยของ X สำหรับ $t \in [0,1]$ จะเรียกเซต μ_t ที่นิยามโดย $\mu_t = \{x \in X \mid \mu(x) \ge t\}$ **ว่า เซตย่อยระดับ** (level subset) ของ μ

วิธีดำเนินการวิจัย

ในการทำงานวิจัยในครั้งนี้ มีวิธีการดำเนินการวิจัยดังนี้

1. เลือกหัวข้อหรือปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่เราสนใจซึ่งในที่นี้เราได้เน้นไปทาง อุดมคติวิภัชนัยของพีชคณิต (Fuzzy Ideals of Algebras)

2. ศึกษารวบรวมบทความวิจัยทางวิชาการและทฤษฎีและนิยามต่างๆที่เกี่ยวข้องกับหัวข้อที่สนใจเพื่อให้เข้าใจพื้นฐานและแนวทางที่เคยมี

3. กำหนดวัตถุประสงค์และขอบเขตของการวิจัยให้ชัดเจนเพื่อให้การวิจัยไม่กว้างเกินไป

4. เสนอแนวคิดนิยามและสร้างทฤษฎีใหม่ๆพร้อมทั้งทำการพิสูจน์ทฤษฎีและตรวจสอบความถูกต้อง

5. สรุปผล อภิปราย และเสนอแนวทางการวิจัยต่อยอดเพื่อเป็นแนวทางในการศึกษาต่อไป

ผลการวิจัย และอภิปรายผล

อุดมคติ KU-ปริยายบวกวิภัชนัย (fuzzy KU-positive implicative ideals)

บทนิยาม 1.5 ให้ X เป็นพีชคณิต KU และ I เป็นเซตย่อยที่ไม่เป็นเซตว่างของ X จะเรียก I ว่า **อุดมคติ KU-ปริยายบวก** (KU-positive implicative ideal) ของ X ถ้าสอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้สำหรับทุกๆ $x, y, z \in X$

(kup1). $0 \in I$

(kup2). ถ้า $((x*z)*z)*(y*z) \in I$ และ $y \in I$ แล้ว $x*z \in I$

ตัวอย่าง 1.1 ให้ $X = \{0, a, b, c, d, e\}$ นิยามการดำเนินการทวิภาค $*$ บน X ดังตารางต่อไปนี้

$*$	0	a	b	c	d	e
0	0	a	b	c	d	e
a	0	0	b	b	d	e
b	0	0	0	a	d	e
c	0	0	0	0	d	e
d	0	0	0	a	0	e
e	0	0	0	0	0	0

จะได้ว่า $(X, *, 0)$ เป็นพีชคณิต KU ให้ $I = \{0, a\}$ จะได้ I เป็น อุดมคติ KU-ปริยายบวกของ X

บทนิยาม 1.6 ให้ μ เป็นเซตวิภัชนัยของพีชคณิต KU X จะเรียก μ ว่า **อุดมคติ KU-ปริยายบวกวิภัชนัย** (fuzzy KU-positive implicative ideal) ของ X ถ้าสอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้สำหรับทุกๆ $x, y, z \in X$

(Fkup1). $\mu(0) \geq \mu(x)$

(Fkup2). $\mu(x*z) \geq \min\{\mu(((x*z)*z)*(y*z)), \mu(y)\}$

ตัวอย่าง 1.2 ให้ $X = \{0, a, b, c, d\}$ นิยามการดำเนินการทวิภาค $*$ บน X ดังตารางต่อไปนี้

$*$	0	a	b	c	d
0	0	a	b	c	d
a	0	0	b	c	d
b	0	a	0	c	c
c	0	0	b	0	b
d	0	0	0	0	0

จะได้ว่า $(X, *, 0)$ เป็นพีชคณิต KU และนิยาม $\mu : X \to [0,1]$ โดย $\mu(0) = 1$
$\mu(a) = \mu(b) = 0.7, \mu(c) = \mu(d) = 0.5$ จะได้ว่า μ เป็นอุดมคติ KU-ปริยายบวกวิภัชนัยของ X

บทตั้ง 1.1 ให้ μ เป็นอุดมคติ KU-ปริยายบวกวิภัชนัยของพีชคณิต KU X ถ้า $x \leq y$ แล้ว $\mu(x) \geq \mu(y)$ สำหรับทุกๆ $x, y \in X$

พิสูจน์ ให้ $x, y \in X$ สมมติ $x \leq y$ จะได้ว่า $y*x = 0$ พิจารณา

$\mu(x)=\mu(0*x)$; (ku3)

$\geq \min\{\mu(((0*x)*x)*(y*x)),\mu(y)\}$; (Fkup2)

$=\min\{\mu(0*(y*x)),\mu(y)\}$; (ku3)

$=\min\{\mu(0*0),\mu(y)\}$; $y*x=0$

$=\min\{\mu(0),\mu(y)\}$; (ku5)

$=\mu(y)$; (Fkup1)

ดังนั้น $\mu(x)\geq\mu(y)$

บทตั้ง 1.2 ให้ X เป็นพีชคณิต KU ถ้า $z\leq x*y$ แล้ว $(((x*y)*z)*z)*(0*z)=0$ สำหรับทุกๆ $x,y,z\in X$

พิสูจน์ ให้ $x,y,z\in X$ สมมติ $z\leq x*y$ จะได้ว่า $(x*y)*z=0$ พิจารณา

$(((x*y)*z)*z)*(0*z)=(0*z)*(0*z)$; (ku3), $(x*y)*z=0$

$=z*z$; (ku3)

$=0$; (ku5)

หมายเหตุ ถ้า μ เป็นอุดมคติ KU-ปริยายบวกวิภัชนัยของพีชคณิต KU X ถ้า $z\leq x*y$ แล้ว $\mu((x*y)*z)\geq\mu((y*x)*z)$ สำหรับทุกๆ $x,y,z\in X$

บทตั้ง 1.3 ให้ X เป็นพีชคณิต KU ถ้า $y\leq x$ แล้ว $((x*y)*y)*(0*y)\leq(x*y)*y$ สำหรับทุกๆ $x,y\in X$

พิสูจน์ ให้ $x,y\in X$ สมมติ $y\leq x$ จะได้ว่า $x*y=0$ พิจารณา

$((x*y)*y)*(0*y)=((x*y)*y)*y$; (ku3)

$=y*y$; $x*y=0$

$=0$; (ku5)

$\leq(x*y)*y$; $(ku2')$

บทตั้ง 1.4 ให้ μ เป็นอุดมคติ KU-ปริยายบวกวิภัชนัยของพีชคณิต KU X ถ้า $y\leq x$ แล้ว $\mu(x*y)\geq\mu((x*y)*y)$ สำหรับทุกๆ $x,y\in X$

พิสูจน์ ให้ $x,y\in X$ สมมติ $y\leq x$ พิจารณา

$\mu(x*y)\geq\min\{\mu(((x*y)*y)*(0*y)),\mu(0)\}$; (Fkup2)

$=\mu(((x*y)*y)*(0*y))$; (Fkup1)

$\geq\mu((x*y)*y)$; บทตั้ง1.3, 1.1

ทฤษฎีบท 1.1 ให้ μ เป็นเซตวิภัชนัยของพีชคณิต KU X สำหรับทุก $t\in[0,1]$ และ $\mu_t\neq\phi$ จะได้ว่า μ เป็นอุดมคติ KU-ปริยายบวกวิภัชนัยของ X ก็ต่อเมื่อ μ_t เป็นอุดมคติ KU-ปริยายบวกของ X

พิสูจน์ ให้ $x, y, z \in X$ และ $\mu_t \neq \phi$ สำหรับทุก $t \in [0,1]$ สมมติ μ เป็นอุดมคติ KU-ปริยายบวกวิภัชนัยของ X เนื่องจาก $\mu_t \neq \phi$ จะมี $x' \in \mu_t$ ดังนั้น $\mu(x') \geq t$ โดย (Fkup1) จะได้ว่า $\mu(0) \geq \mu(x) \geq t$ นั่นคือ $0 \in \mu_t$ สมมติ $((x*z)*z)*(y*z) \in \mu_t$ และ $y \in \mu_t$ จะได้ว่า $\mu(((x*z)*z)*(y*z)) \geq t$ และ $\mu(y) \geq t$ โดย (Fkup2) จะได้ว่า

$\mu(x*z) \geq \min\{\mu(((x*z)*z)*(y*z)), \mu(y)\} \geq \min\{t,t\} = t$ นั่นคือ $x*z \in \mu_t$ สรุปได้ว่า μ_t เป็นอุดมคติ KU-ปริยายบวกของ X

ในทางกลับกันสมมติ $\mu_t \neq \phi$ เป็นอุดมคติ KU-ปริยายบวกของ X สำหรับทุก $t \in [0,1]$

สมมติ (Fkup1) **หรือ** (Fkup2) ไม่จริง

กรณีที่ 1. ถ้า (Fkup1) ไม่จริง จะได้ว่ามี $x' \in X$ ที่ $\mu(0) < \mu(x')$ เลือก $t' = [(\mu(0) + \mu(x'))]/2$ จะได้ว่า $\mu(0) < t'$ และ $0 \leq t' < \mu(x') \leq 1$ จะได้ $x' \in \mu_{t'}$ ทำให้ $\mu_{t'} \neq \phi$ จากสมมติฐานจะได้ว่า $\mu_{t'}$ เป็นอุดมคติ KU-ปริยายบวกของ X ดังนั้น $\mu(0) \geq t'$ เกิดข้อขัดแย้ง

กรณีที่ 2. ถ้า (Fkup2) ไม่จริง จะได้ว่ามี $x', y', z' \in X$ ที่ทำให้

$\mu(x'*z') < \min\{\mu(((x'*z')*z')*(y'*z')), \mu(y')\}$ เลือก

$t' = \left[\mu(x'*z') + \min\{\mu(((x'*z')*z')*(y'*z')), \mu(y')\}\right]/2$ จะได้ว่า

$\mu(x'*z') < t'$ และ $0 \leq t' < \min\{\mu(((x'*z')*z')*(y'*z')), \mu(y')\} \leq 1$

ทำให้ได้ว่า $((x'*z')*z')*(y'*z') \in \mu_{t'}$ และ $y' \in \mu_{t'}$ ทำให้ $\mu_{t'} \neq \phi$ จากสมมติฐาน $\mu_{t'}$ เป็นอุดมคติ KU-ปริยายบวกของ X สำหรับทุก $t \in [0,1]$ จะได้ว่า $x'*z' \in \mu_{t'}$ ดังนั้น $\mu(x'*z') \geq t'$ เกิดข้อขัดแย้ง จากกรณีที่ 1. และ 2. สรุปได้ว่า μ เป็น อุดมคติ KU-ปริยายบวกวิภัชนัยของ X

สำหรับพีชคณิต KU X ให้ $\Delta \subseteq X$ โดยที่ $0 \in \Delta$ นิยามฟังก์ชัน $\mu_\Delta : X \to [0,1]$ โดย

$$\mu_\Delta(x) = \begin{cases} 1; x \in \Delta \\ 0; x \notin \Delta \end{cases}$$

สำหรับทุก ๆ $x \in X$ และจะเรียกฟังก์ชัน μ_Δ ว่า**ฟังก์ชันลักษณะเฉพาะ** (characteristic function)

ทฤษฎีบท 1.2 ให้ X พีชคณิต KU และ $\Delta \subseteq X$ โดยที่ $0 \in \Delta$ จะได้ว่า

μ_Δ เป็นอุดมคติ KU-ปริยายบวกวิภัชนัยของ X ก็ต่อเมื่อ Δ อุดมคติ KU-ปริยายบวกของ X

พิสูจน์ สมมติให้ μ_Δ อุดมคติ KU-ปริยายบวกวิภัชนัยของ X โดยทฤษฎีบท 1.1 จะได้ว่า $\Delta = (\mu_\Delta)_1$ เป็นอุดมคติ KU-ปริยายบวกของ X

ในทางกลับกัน สมมติให้ Δ เป็นอุดมคติ KU-ปริยายบวกของ X โดยที่ $0 \in \Delta$ สำหรับทุกๆ $t \in [0,1]$ จะได้ว่า $(\mu_\Delta)_t = \Delta$ หรือ $(\mu_\Delta)_t = X$ และเนื่องจาก Δ และ X เป็นอุดมคติ KU-ปริยายบวกของ X ทั้งสองโดยทฤษฎีบท 1.1 จะได้ว่า μ_Δ เป็นอุดมคติ KU-ปริยายบวกวิภัชนัยของ X

สรุปผล และข้อเสนอแนะ

การศึกษานี้ส่งผลให้ทราบนิยามแนวคิดของอุดมคติ KU-ปริยายบวกวิภัชนัยของพีชคณิต KU นอกจากนี้ ยังได้แสดงผลลัพธ์บางประการที่เกี่ยวข้องกับอุดมคติ KU-ปริยายบวกวิภัชนัยของพีชคณิต KU และผลลัพธ์บางประการอุดมคติ KU-ปริยายบวกของพีชคณิต KU อีกทั้งยังได้ทฤษฎีที่แสดงให้เห็นถึงความสัมพันธ์ระหว่างอุดมคติ KU-ปริยายบวกวิภัชนัยและอุดมคติ KU-ปริยายบวกของพีชคณิต KU อีกด้วย ซึ่งสามารถนำไปสร้างงานวิจัยเกี่ยวกับอุดมคติ KU-ปริยายบวกวิภัชนัยบนพีชคณิตตัวอื่นๆ ได้อีกมากมาย

กิตติกรรมประกาศ

งานวิจัยชิ้นนี้สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดีด้วยความกรุณาและความช่วยเหลืออย่างสูงจาก ผศ.ดร. บรรชา นันจรัส อาจารย์สาขาวิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม ที่ได้ให้คำปรึกษา คำแนะนำ และแก้ไขข้อผิดพลาดด้วยความเอาใจใส่ในทุกขั้นตอน ตลอดจนผู้ที่มีส่วนร่วมทั้งหลาย ผู้ทรงคุณวุฒิ ผู้บริหาร รวมถึงสาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม ที่ให้การสนับสนุนการทำวิจัยในครั้งนี้

เอกสารอ้างอิง

Iseki, K. (1975). On ideals in BCK- algebras. *Mathematics Seminar Notes*, 3, 1-12.

Mostafa, S. M., Abd-Elnaby, M. A., & Yousef, M. M. M. (2011). Fuzzy ideals of KU- algebras. *International Mathematical Forum*, *6*(63), 3139-3149.

Prabpayak, C., & Leerawat, U. (2009a). On ideals and congruences in KU-algebras. *Scientia Magna, 5*(1), 54-57.

Prabpayak, C., & Leerawat, U. (2009b). On isomorphisms of KU-algebras. *Scientia Magna, 5*(3), 25-31.

Rosenfeld, A. (1971). Fuzzy groups. *Journal of Mathematical Analysis and Application*, 35, 512-517.

Xi, O. G. (1991). Fuzzy BCK- algebras. *Mathematica Japonica*, 36, 935-942.

Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets. *Information and control*, 3, 338-353.