



ผลเฉลยจำนวนเต็มบวกทั้งหมดของสมการไดโอแฟนไทน์ $\frac{1}{w} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2}$

All positive integer solutions of the Diophantine equation $\frac{1}{w} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2}$

สมประสงค์ แก้วสาด สุทธิภัทร ละวรรณหา อติชา เยี่ยมราษฎร์ และ สุธน ตาดิ*

Somprasong Kaewsod Sutthiphat Lawantha Aticha Yiamras and Suton Tadee*

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเทพสตรี อำเภอเมือง จังหวัดลพบุรี 15000

Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Thepsatri Rajabhat University, Lopburi, 15000, Thailand.

ข้อมูลบทความ

ประวัติบทความ

รับเมื่อ: 19 มีนาคม 2568

แก้ไขเมื่อ: 23 พฤษภาคม 2568

ตอบรับเมื่อ: 22 สิงหาคม 2568

เผยแพร่ออนไลน์:

10 ตุลาคม 2568

คำสำคัญ

สมการไดโอแฟนไทน์

ผลเฉลยจำนวนเต็มบวก

*ผู้ประพันธ์บรรณกิจ

อีเมล:

suton.t@lawasri.tru.ac.th

(สุธน ตาดิ)

ARTICLE INFO

Article History

Received: 19 March 2025

Revised: 23 May 2025

Accepted:

22 August 2025

Available online:

10 October 2025

Keywords:

Diophantine Equation

Positive Integer Solution

*Corresponding author

Email address:

suton.t@lawasri.tru.ac.th

(S. Tadee)

บทคัดย่อ

ในปี ค.ศ. 2018 Bai ได้ศึกษาและค้นพบผลเฉลยจำนวนเต็มบวกทั้งหมดของสมการไดโอแฟนไทน์ $\frac{1}{w} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2}$ เมื่อ w, x, y และ z เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่ $w \leq x \leq y \leq z$ แต่ภายหลังจากที่คณะผู้วิจัยได้ศึกษางานวิจัยดังกล่าว พบว่า ผลเฉลยที่ Bai ค้นพบนั้น ยังไม่ครบทุกผลเฉลย ด้วยเหตุนี้ ในงานวิจัยนี้จึงมีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ดังกล่าว โดยใช้ความรู้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์ ผลการวิจัย พบว่า สมการไดโอแฟนไทน์ดังกล่าวมีผลเฉลยจำนวนเต็มบวก (w, x, y, z) จำนวนทั้งสิ้น 108 ผลเฉลย

ABSTRACT

In 2018, Bai studied and found all positive integer solutions of the Diophantine equation $\frac{1}{w} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2}$, where w, x, y and z are positive integers such that $w \leq x \leq y \leq z$. Later it was later found that the solutions were incomplete. This research aims to study and find all positive integer solutions of the Diophantine equation, by using elementary mathematical methods. The research results found that the positive integer solutions (w, x, y, z) of the Diophantine equation were a total of 108 solutions.

1. บทนำ

สมการไดโอแฟนไทน์ (Diophantine equation) เป็นสมการหนึ่งที่มีบทบาทสำคัญในทางทฤษฎีจำนวน โดยสมการดังกล่าวจะพิจารณาเฉพาะผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มเท่านั้น ซึ่งสมการไดโอแฟนไทน์นั้นมียุทธศาสตร์หลายรูปแบบ รูปแบบหนึ่งที่มีผู้สนใจศึกษาหาผลเฉลย คือ สมการที่อยู่ในรูป $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_k} = \frac{1}{n}$ เมื่อ x_1, x_2, \dots, x_k และ n เป็นจำนวนเต็มบวก ตัวอย่างสำหรับกรณีที่ $k = 3$ เช่น ในปี ค.ศ. 2013 Rabago and Tagle [1] ได้พิสูจน์ว่า สมการไดโอแฟนไทน์ $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2}$ มีผลเฉลยจำนวนเต็มบวก (x, y, z) ทั้งหมด จำนวน 10 ผลเฉลย หลังจากนั้นในปีเดียวกัน Sándor [2] ได้เสนอวิธีที่ง่ายกว่าในการหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ดังกล่าว และต่อมาในปี ค.ศ. 2022 Atri [3] ได้ศึกษาผลเฉลยจำนวนเต็มบวกของสมการไดโอแฟนไทน์ $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{4}$ ในปี ค.ศ. 2023 Tadee and Poopra [4] ได้พิสูจน์ว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{3}$ มีผลเฉลยจำนวนเต็มบวก (x, y, z) ทั้งหมด จำนวน 21 ผลเฉลย

สำหรับกรณีที่ $k = 4$ ตัวอย่างเช่น ในปี ค.ศ. 2018 Bai [5] ได้ศึกษาและแสดงผลเฉลยจำนวนเต็มบวก (w, x, y, z) ทั้งหมดของสมการไดโอแฟนไทน์ $\frac{1}{w} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2}$ เมื่อ w, x, y และ z เป็นจำนวนเต็มบวก ต่อมาในปี ค.ศ. 2023 Wongsanurak and Duangdai [6] ได้ศึกษาสมการไดโอแฟนไทน์ $\frac{1}{w} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{u}{u+1}$ โดยที่ $w \leq x \leq y \leq z$ และ $u, w, x, y, z \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ ผลการวิจัย พบว่า สมการดังกล่าวมีผลเฉลย จำนวน 18 ผลเฉลย และไม่มีผลเฉลย ในกรณีที่ $u = 6$ และเมื่อไม่นานมานี้ Tadee [7] ได้ศึกษาสมการดังกล่าวเช่นเดียวกัน โดยศึกษาในกรณีที่ $9 \leq w \leq x \leq y \leq z$ และ u เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ ผลการวิจัยพบว่า สมการดังกล่าวมีผลเฉลย จำนวน 27 ผลเฉลย

หลังจากที่คณะผู้วิจัยได้ศึกษางานวิจัยของ Bai (2018) พบว่าผลเฉลยที่ Bai ค้นพบนั้น ยังมีความซ้ำซ้อนกันในบางกรณีและยังไม่ใช้ผลเฉลยจำนวนเต็มบวกทั้งหมดของสมการไดโอแฟนไทน์ เนื่องจากขาดผลเฉลย (w, x, y, z) ได้แก่ $(3, 7, 63, 126)$, $(3, 7, 70, 105)$, $(3, 7, 78, 91)$, $(3, 7, 84, 84)$, $(3, 8, 48, 48)$, $(4, 5, 22, 220)$, $(4, 5, 36, 45)$, $(4, 5, 40, 40)$, $(6, 9, 9, 9)$ และ $(7, 7, 7, 14)$ ดังนั้น ในงานวิจัยนี้ คณะผู้วิจัยจึงจะหาผลเฉลยจำนวนเต็มบวกทั้งหมดของสมการไดโอแฟนไทน์

$$\frac{1}{w} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2} \quad (1)$$

เมื่อ w, x, y และ z เป็นจำนวนเต็มบวก

2. วิธีดำเนินการวิจัย

เพื่อศึกษาหาผลเฉลยจำนวนเต็มบวกทั้งหมดของสมการ (1)

3. ผลการวิจัยและอภิปรายผล

ให้ w, x, y และ z เป็นจำนวนเต็มบวก และเป็นผลเฉลยของสมการ (1) จะได้ว่า $\frac{1}{w} < \frac{1}{2}$ ดังนั้น $3 \leq w$ โดยไม่เสียสัจพจน์ สมมติว่า $w \leq x \leq y \leq z$ จะได้ว่า $\frac{1}{z} \leq \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{w}$

ดังนั้นจากสมการ (1) จะได้ว่า

$$\frac{4}{w} = \frac{1}{w} + \frac{1}{w} + \frac{1}{w} + \frac{1}{w} \geq \frac{1}{w} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2}$$

เพราะฉะนั้น $w \leq 8$ ดังนั้นต่อไปจะพิจารณากรณีที่ $w = 3, 4, \dots, 8$ ตามลำดับ

กรณีที่ 1: $w = 3$ จากสมการ (1) จะได้ว่า

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{6} \quad (2)$$

ดังนั้น $\frac{1}{x} < \frac{1}{6}$ และ $\frac{3}{x} \geq \frac{1}{6}$ เพราะฉะนั้น $7 \leq x \leq 18$

กรณีที่ 1.1: $x = 7$ จากสมการ (2) จะได้ว่า

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{42} \quad (3)$$

ดังนั้น $\frac{1}{y} < \frac{1}{42}$ และ $\frac{2}{y} \geq \frac{1}{42}$ เพราะฉะนั้น $43 \leq y \leq 84$ นำค่า y

ไปแทนในสมการ (3) แล้วพิจารณาค่า z ที่เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า

ผลเฉลย (w, x, y, z) คือ $(3, 7, 43, 1806)$, $(3, 7, 44, 924)$, $(3, 7, 45, 630)$, $(3, 7, 46, 483)$, $(3, 7, 48, 336)$, $(3, 7, 49, 294)$, $(3, 7, 51, 238)$, $(3, 7, 54, 189)$, $(3, 7, 56, 168)$, $(3, 7, 60, 140)$, $(3, 7, 63, 126)$, $(3, 7, 70, 105)$, $(3, 7, 78, 91)$ และ $(3, 7, 84, 84)$

กรณีที่ 1.2: $x = 8$ จากสมการ (2) จะได้ว่า

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{24} \quad (4)$$

ดังนั้น $\frac{1}{y} < \frac{1}{24}$ และ $\frac{2}{y} \geq \frac{1}{24}$ เพราะฉะนั้น $25 \leq y \leq 48$ นำค่า y

ไปแทนในสมการ (4) แล้วพิจารณาค่า z ที่เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า

ผลเฉลย (w, x, y, z) คือ $(3, 8, 25, 600)$, $(3, 8, 26, 312)$, $(3, 8, 27, 216)$, $(3, 8, 28, 168)$, $(3, 8, 30, 120)$, $(3, 8, 32, 96)$, $(3, 8, 33, 88)$, $(3, 8, 36, 72)$, $(3, 8, 40, 60)$, $(3, 8, 42, 56)$ และ $(3, 8, 48, 48)$

กรณีที่ 1.3: $x = 9$ จากสมการ (2) จะได้ว่า

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{18} \quad (5)$$

ดังนั้น $\frac{1}{y} < \frac{1}{18}$ และ $\frac{2}{y} \geq \frac{1}{18}$ เพราะฉะนั้น $19 \leq y \leq 36$ นำค่า y ไปแทนในสมการ (5) แล้วพิจารณาค่า z ที่เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า ผลเฉลย (w, x, y, z) คือ $(3, 9, 19, 342)$, $(3, 9, 20, 180)$, $(3, 9, 21, 126)$, $(3, 9, 22, 99)$, $(3, 9, 24, 72)$, $(3, 9, 27, 54)$, $(3, 9, 30, 45)$ และ $(3, 9, 36, 36)$

กรณีที่ 1.4: $x = 10$ จากสมการ (2) จะได้ว่า

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{15} \quad (6)$$

ดังนั้น $\frac{1}{y} < \frac{1}{15}$ และ $\frac{2}{y} \geq \frac{1}{15}$ เพราะฉะนั้น $16 \leq y \leq 30$ นำค่า y ไปแทนในสมการ (6) แล้วพิจารณาค่า z ที่เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า ผลเฉลย (w, x, y, z) คือ $(3, 10, 16, 240)$, $(3, 10, 18, 90)$, $(3, 10, 20, 60)$, $(3, 10, 24, 40)$ และ $(3, 10, 30, 30)$

กรณีที่ 1.5: $x = 11$ จากสมการ (2) จะได้ว่า

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{5}{66} \quad (7)$$

ดังนั้น $\frac{1}{y} < \frac{5}{66}$ และ $\frac{2}{y} \geq \frac{5}{66}$ เพราะฉะนั้น $14 \leq y \leq 26$ นำค่า y ไปแทนในสมการ (7) แล้วพิจารณาค่า z ที่เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า ผลเฉลย (w, x, y, z) คือ $(3, 11, 14, 231)$, $(3, 11, 15, 110)$ และ $(3, 11, 22, 33)$

กรณีที่ 1.6: $x = 12$ จากสมการ (2) จะได้ว่า

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{12} \quad (8)$$

ดังนั้น $\frac{1}{y} < \frac{1}{12}$ และ $\frac{2}{y} \geq \frac{1}{12}$ เพราะฉะนั้น $13 \leq y \leq 24$ นำค่า y ไปแทนในสมการ (8) แล้วพิจารณาค่า z ที่เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า ผลเฉลย (w, x, y, z) คือ $(3, 12, 13, 156)$, $(3, 12, 14, 84)$, $(3, 12, 15, 60)$, $(3, 12, 16, 48)$, $(3, 12, 18, 36)$, $(3, 12, 20, 30)$, $(3, 12, 21, 28)$ และ $(3, 12, 24, 24)$

กรณีที่ 1.7: $x = 13$ จากสมการ (2) จะได้ว่า

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{7}{78} \quad (9)$$

ดังนั้น $\frac{2}{y} \geq \frac{7}{78}$ และจาก $x \leq y$ เพราะฉะนั้น $13 \leq y \leq 22$ นำค่า y ไปแทนในสมการ (9) แล้วพิจารณาค่า z ที่เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า ผลเฉลย (w, x, y, z) คือ $(3, 13, 13, 78)$

กรณีที่ 1.8: $x = 14$ จากสมการ (2) จะได้ว่า

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{2}{21} \quad (10)$$

ดังนั้น $\frac{2}{y} \geq \frac{2}{21}$ และจาก $x \leq y$ เพราะฉะนั้น $14 \leq y \leq 21$ นำค่า y ไปแทนในสมการ (10) แล้วพิจารณาค่า z ที่เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ผลเฉลย (w, x, y, z) คือ $(3, 14, 14, 42)$, $(3, 14, 15, 35)$ และ $(3, 14, 21, 21)$

กรณีที่ 1.9: $x = 15$ จากสมการ (2) จะได้ว่า

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{10} \quad (11)$$

ดังนั้น $\frac{2}{y} \geq \frac{1}{10}$ และจาก $x \leq y$ เพราะฉะนั้น $15 \leq y \leq 20$ นำค่า y ไปแทนในสมการ (11) แล้วพิจารณาค่า z ที่เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ผลเฉลย (w, x, y, z) คือ $(3, 15, 15, 30)$ และ $(3, 15, 20, 20)$

กรณีที่ 1.10: $x = 16$ จากสมการ (2) จะได้ว่า

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{5}{48} \quad (12)$$

ดังนั้น $\frac{2}{y} \geq \frac{5}{48}$ และจาก $x \leq y$ เพราะฉะนั้น $16 \leq y \leq 19$ นำค่า y ไปแทนในสมการ (12) แล้วพิจารณาค่า z ที่เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ผลเฉลย (w, x, y, z) คือ $(3, 16, 16, 24)$

กรณีที่ 1.11: $x = 17$ จากสมการ (2) จะได้ว่า

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{11}{102} \quad (13)$$

ดังนั้น $\frac{2}{y} \geq \frac{11}{102}$ และจาก $x \leq y$ เพราะฉะนั้น $17 \leq y \leq 18$ นำค่า y ไปแทนในสมการ (13) จะได้ว่าค่า z ที่ได้ไม่เป็นจำนวนเต็มบวก ดังนั้น กรณีนี้ไม่มีผลเฉลย

กรณีที่ 1.12: $x = 18$ จากสมการ (2) จะได้ว่า

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{9} \quad (14)$$

ดังนั้น $\frac{2}{y} \geq \frac{1}{9}$ และจาก $x \leq y$ เพราะฉะนั้น $y = 18$ นำค่า y ไปแทนในสมการ (14) จะได้ผลเฉลย (w, x, y, z) คือ $(3, 18, 18, 18)$

กรณีที่ 2: $w = 4$ จากสมการ (1) จะได้ว่า

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{4} \quad (15)$$

ดังนั้น $\frac{1}{x} < \frac{1}{4}$ และ $\frac{3}{x} \geq \frac{1}{4}$ เพราะฉะนั้น $5 \leq x \leq 12$

กรณีที่ 2.1: $x = 5$ จากสมการ (15) จะได้ว่า

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{20} \quad (16)$$

ดังนั้น $\frac{1}{y} < \frac{1}{20}$ และ $\frac{2}{y} \geq \frac{1}{20}$ เพราะฉะนั้น $21 \leq y \leq 40$ นำค่า y

ไปแทนในสมการ (16) แล้วพิจารณาค่า z ที่เป็นจำนวนเต็ม จะได้ว่า

ผลเฉลย (w, x, y, z) คือ $(4, 5, 21, 420)$, $(4, 5, 22, 220)$,
 $(4, 5, 24, 120)$, $(4, 5, 25, 100)$, $(4, 5, 28, 70)$,
 $(4, 5, 30, 60)$, $(4, 5, 36, 45)$ และ $(4, 5, 40, 40)$

กรณีที่ 2.2: $x = 6$ จากสมการ (15) จะได้ว่า

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{12} \quad (17)$$

ดังนั้น $\frac{1}{y} < \frac{1}{12}$ และ $\frac{2}{y} \geq \frac{1}{12}$ เพราะฉะนั้น $13 \leq y \leq 24$ นำค่า y

ไปแทนในสมการ (17) แล้วพิจารณาค่า z ที่เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า

ผลเฉลย (w, x, y, z) คือ $(4, 6, 13, 156)$, $(4, 6, 14, 84)$,
 $(4, 6, 15, 60)$, $(4, 6, 16, 48)$, $(4, 6, 18, 36)$, $(4, 6, 20, 30)$,
 $(4, 6, 21, 28)$ และ $(4, 6, 24, 24)$

กรณีที่ 2.3: $x = 7$ จากสมการ (15) จะได้ว่า

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{3}{28} \quad (18)$$

ดังนั้น $\frac{1}{y} < \frac{3}{28}$ และ $\frac{2}{y} \geq \frac{3}{28}$ เพราะฉะนั้น $10 \leq y \leq 18$ นำค่า y

ไปแทนในสมการ (18) แล้วพิจารณาค่า z ที่เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า

ผลเฉลย (w, x, y, z) คือ $(4, 7, 10, 140)$, $(4, 7, 12, 42)$ และ
 $(4, 7, 14, 28)$

กรณีที่ 2.4: $x = 8$ จากสมการ (15) จะได้ว่า

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{8} \quad (19)$$

ดังนั้น $\frac{1}{y} < \frac{1}{8}$ และ $\frac{2}{y} \geq \frac{1}{8}$ เพราะฉะนั้น $9 \leq y \leq 16$ นำค่า y

ไปแทนในสมการ (19) แล้วพิจารณาค่า z ที่เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า

ผลเฉลย (w, x, y, z) คือ $(4, 8, 9, 72)$, $(4, 8, 10, 40)$,
 $(4, 8, 12, 24)$ และ $(4, 8, 16, 16)$

กรณีที่ 2.5: $x = 9$ จากสมการ (15) จะได้ว่า

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{5}{36} \quad (20)$$

ดังนั้น $\frac{2}{y} \geq \frac{5}{36}$ และจาก $x \leq y$ เพราะฉะนั้น $9 \leq y \leq 14$ นำค่า y

ไปแทนในสมการ (20) แล้วพิจารณาค่า z ที่เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า

ผลเฉลย (w, x, y, z) คือ $(4, 9, 9, 36)$ และ $(4, 9, 12, 18)$

กรณีที่ 2.6: $x = 10$ จากสมการ (15) จะได้ว่า

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{3}{20} \quad (21)$$

ดังนั้น $\frac{2}{y} \geq \frac{3}{20}$ และจาก $x \leq y$ เพราะฉะนั้น $10 \leq y \leq 13$ นำค่า

y ไปแทนในสมการ (21) แล้วพิจารณาค่า z ที่เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้
 ผลเฉลย (w, x, y, z) คือ $(4, 10, 10, 20)$ และ $(4, 10, 12, 15)$

กรณีที่ 2.7: $x = 11$ จากสมการ (15) จะได้ว่า

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{7}{44} \quad (22)$$

ดังนั้น $\frac{2}{y} \geq \frac{7}{44}$ และจาก $x \leq y$ เพราะฉะนั้น $11 \leq y \leq 12$ นำค่า

y ไปแทนในสมการ (22) จะได้ว่าค่า z ที่ได้ไม่เป็นจำนวนเต็มบวก ดังนั้น
 กรณีนี้ไม่มีผลเฉลย

กรณีที่ 2.8: $x = 12$ จากสมการ (15) จะได้ว่า

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{6} \quad (23)$$

ดังนั้น $\frac{2}{y} \geq \frac{1}{6}$ และจาก $x \leq y$ เพราะฉะนั้น $y = 12$ นำค่า y ไปแทน

ในสมการ (23) แล้วได้ผลเฉลย (w, x, y, z) คือ $(4, 12, 12, 12)$

กรณีที่ 3: $w = 5$ จากสมการ (1) จะได้ว่า

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{3}{10} \quad (24)$$

ดังนั้น $\frac{3}{x} \geq \frac{3}{10}$ และจาก $w \leq x$ เพราะฉะนั้น $5 \leq x \leq 10$

กรณีที่ 3.1: $x = 5$ จากสมการ (24) จะได้ว่า

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{10} \quad (25)$$

ดังนั้น $\frac{1}{y} < \frac{1}{10}$ และ $\frac{2}{y} \geq \frac{1}{10}$ เพราะฉะนั้น $11 \leq y \leq 20$ นำค่า y

ไปแทนในสมการ (25) แล้วพิจารณาค่า z ที่เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า

ผลเฉลย (w, x, y, z) คือ $(5, 5, 11, 110)$, $(5, 5, 12, 60)$,
 $(5, 5, 14, 35)$, $(5, 5, 15, 30)$ และ $(5, 5, 20, 20)$

กรณีที่ 3.2: $x = 6$ จากสมการ (24) จะได้ว่า

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{2}{15} \quad (26)$$

ดังนั้น $\frac{1}{y} < \frac{2}{15}$ และ $\frac{2}{y} \geq \frac{2}{15}$ เพราะฉะนั้น $8 \leq y \leq 15$ นำค่า y

ไปแทนในสมการ (26) แล้วพิจารณาค่า z ที่เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า

ผลเฉลย (w, x, y, z) คือ $(5, 6, 8, 120)$, $(5, 6, 9, 45)$,
 $(5, 6, 10, 30)$, $(5, 6, 12, 20)$ และ $(5, 6, 15, 15)$

กรณีที่ 3.3: $x = 7$ จากสมการ (24) จะได้ว่า

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{11}{70} \quad (27)$$

ดังนั้น $\frac{2}{y} \geq \frac{11}{70}$ และจาก $x \leq y$ เพราะฉะนั้น $7 \leq y \leq 12$ นำค่า y ไปแทนในสมการ (27) แล้วพิจารณาค่า z ที่เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ผลเฉลย (w, x, y, z) คือ $(5, 7, 7, 70)$

กรณีที่ 3.4: $x = 8$ จากสมการ (24) จะได้ว่า

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{7}{40} \quad (28)$$

ดังนั้น $\frac{2}{y} \geq \frac{7}{40}$ และจาก $x \leq y$ เพราะฉะนั้น $8 \leq y \leq 11$ นำค่า y ไปแทนในสมการ (28) แล้วพิจารณาค่า z ที่เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ผลเฉลย (w, x, y, z) คือ $(5, 8, 8, 20)$

กรณีที่ 3.5: $x = 9$ จากสมการ (24) จะได้ว่า

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{17}{90} \quad (29)$$

ดังนั้น $\frac{2}{y} \geq \frac{17}{90}$ และจาก $x \leq y$ เพราะฉะนั้น $9 \leq y \leq 10$ นำค่า y ไปแทนในสมการ (29) จะได้ว่าค่า z ที่ได้ไม่เป็นจำนวนเต็มบวก ดังนั้นกรณีนี้ไม่มีผลเฉลย

กรณีที่ 3.6: $x = 10$ จากสมการ (24) จะได้ว่า

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{5} \quad (30)$$

ดังนั้น $\frac{2}{y} \geq \frac{1}{5}$ และจาก $x \leq y$ เพราะฉะนั้น $y = 10$ นำค่า y ไปแทนในสมการ (30) แล้วได้ผลเฉลย (w, x, y, z) คือ $(5, 10, 10, 10)$

กรณีที่ 4: $w = 6$ จากสมการ (1) จะได้ว่า

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{3} \quad (31)$$

ดังนั้น $\frac{3}{x} \geq \frac{1}{3}$ และจาก $w \leq x$ เพราะฉะนั้น $6 \leq x \leq 9$

กรณีที่ 4.1: $x = 6$ จากสมการ (31) จะได้ว่า

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{6} \quad (32)$$

ดังนั้น $\frac{1}{y} < \frac{1}{6}$ และ $\frac{2}{y} \geq \frac{1}{6}$ เพราะฉะนั้น $7 \leq y \leq 12$ นำค่า y ไปแทนในสมการ (32) แล้วพิจารณาค่า z ที่เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่าผลเฉลย (w, x, y, z) คือ $(6, 6, 7, 42)$, $(6, 6, 8, 24)$, $(6, 6, 9, 18)$, $(6, 6, 10, 15)$ และ $(6, 6, 12, 12)$

กรณีที่ 4.2: $x = 7$ จากสมการ (31) จะได้ว่า

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{4}{21} \quad (33)$$

ดังนั้น $\frac{2}{y} \geq \frac{4}{21}$ และจาก $x \leq y$ เพราะฉะนั้น $7 \leq y \leq 10$ นำค่า y ไปแทนในสมการ (33) แล้วพิจารณาค่า z ที่เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่าผลเฉลย (w, x, y, z) คือ $(6, 7, 7, 21)$

กรณีที่ 4.3: $x = 8$ จากสมการ (31) จะได้ว่า

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{5}{24} \quad (34)$$

ดังนั้น $\frac{2}{y} \geq \frac{5}{24}$ และจาก $x \leq y$ เพราะฉะนั้น $8 \leq y \leq 9$ นำค่า y ไปแทนในสมการ (34) แล้วพิจารณาค่า z ที่เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่าผลเฉลย (w, x, y, z) คือ $(6, 8, 8, 12)$

กรณีที่ 4.4: $x = 9$ จากสมการ (31) จะได้ว่า

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{2}{9} \quad (35)$$

ดังนั้น $\frac{2}{y} \geq \frac{2}{9}$ และจาก $x \leq y$ เพราะฉะนั้น $y = 9$ นำค่า y ไปแทนในสมการ (35) จะได้ผลเฉลย (w, x, y, z) คือ $(6, 9, 9, 9)$

กรณีที่ 5: $w = 7$ จากสมการ (1) จะได้ว่า

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{5}{14} \quad (36)$$

ดังนั้น $\frac{3}{x} \geq \frac{5}{14}$ และจาก $w \leq x$ เพราะฉะนั้น $7 \leq x \leq 8$

กรณีที่ 5.1: $x = 7$ จากสมการ (36) จะได้ว่า

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{21}{98} \quad (37)$$

ดังนั้น $\frac{2}{y} \geq \frac{21}{98}$ และจาก $x \leq y$ เพราะฉะนั้น $7 \leq y \leq 9$ นำค่า y ไปแทนในสมการ (37) แล้วพิจารณาค่า z ที่เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่าผลเฉลย (w, x, y, z) คือ $(7, 7, 7, 14)$

กรณีที่ 5.2: $x = 8$ จากสมการ (36) จะได้ว่า

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{13}{56} \quad (38)$$

ดังนั้น $\frac{2}{y} \geq \frac{13}{56}$ และจาก $x \leq y$ เพราะฉะนั้น $y = 8$ นำค่า y ไปแทนในสมการ (38) จะได้ว่าค่า z ที่ได้ไม่เป็นจำนวนเต็มบวก ดังนั้นกรณีนี้ไม่มีผลเฉลย

กรณีที่ 6: $w = 8$ จากสมการ (1) จะได้ว่า

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{3}{8} \quad (39)$$

ดังนั้น $\frac{3}{x} \geq \frac{3}{8}$ และจาก $w \leq x$ เพราะฉะนั้น $x = 8$ นำค่า x ไปแทนในสมการ (39) จะได้ว่า

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{4} \quad (40)$$

ดังนั้น $\frac{2}{y} \geq \frac{1}{4}$ และจาก $x \leq y$ เพราะฉะนั้น $y = 8$ นำค่า y ไปแทนในสมการ (40) จะได้ผลเฉลย (w, x, y, z) คือ $(8, 8, 8, 8)$

4. สรุปผล

ในงานวิจัยนี้ได้แสดงว่า สมการไดโอแฟนไทน์ $\frac{1}{w} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2}$ เมื่อ w, x, y และ z เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่ $w \leq x \leq y \leq z$ มีผลเฉลยจำนวนเต็มบวก (w, x, y, z) ทั้งหมดจำนวน 108 ผลเฉลย ซึ่งในการแสดงดังกล่าวได้ใช้เพียงความรู้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์ และด้วยวิธีการนี้คาดว่าสามารถนำไปใช้ในการหาผลเฉลยจำนวนเต็มบวก (w, x, y, z) ของสมการไดโอแฟนไทน์ $\frac{1}{w} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{n}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ

กิตติกรรมประกาศ (Acknowledgment)

คณะผู้วิจัยขอขอบคุณ สถาบันวิจัยและพัฒนา และคณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเทพสตรี ที่ให้การสนับสนุนในการทำวิจัยในครั้งนี้

เอกสารอ้างอิง

- [1] Rabago, J.F.T. and Tagle, R.P. (2013). On the area and volume of a certain regular solid and the Diophantine equation $\frac{1}{2} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$. *Notes on Number Theory and Discrete Mathematics*, 19(3), 28-32.
<https://nntdm.net/papers/nntdm-19/NNTDM-19-3-28-32.pdf>
- [2] Sándor, J. (2013). A note on a Diophantine equation. *Notes on Number Theory and Discrete Mathematics*, 19(4), 1-3.
<https://www.nntdm.net/papers/nntdm-19/NNTDM-19-4-01-03.pdf>
- [3] Atri, R. (2022). On the Diophantine equations $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{4}$ and $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} = \frac{1}{4}$. *International Journal of Science and Research*, 11(1), 573-574.
<https://www.ijer.in/index.php/ijer/article/view/111111>
- [4] Tadee, S. and Poopra, S. (2023). On the Diophantine equation $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{n}$. *International Journal of Mathematics and Computer Science*, 18(2), 173-177.
https://www.researchgate.net/publication/368691259_On_the_Diophantine_Equation_1x1y1z1n
- [5] Bai, T. (2018). On $\frac{1}{w} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2}$ and some of its generalizations. *Journal of Inequalities and Applications*, 2018, 1-13.
<https://journalofinequalitiesandapplications.springeropen.com/counter/pdf/10.1186/s13660-018-1782-z.pdf>
- [6] Wongsanurak, W. and Duangdai, E. (2023). The natural number solutions of the Diophantine equation $\frac{1}{w} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{u}{u+1}$. *Academic Journal of Science and Applied Science*, 2, 91-98. (in Thai) <https://ph03.tci-thaijo.org/index.php/ajsas/article/view/3574/2723>
- [7] Tadee, S. (2025). On the Diophantine equation $\frac{1}{w} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{u}{u+1}$. *Progress in Applied Science and Technology*, 15(1), 1-5.
<https://doi.org/10.60101/past.2025.257129>