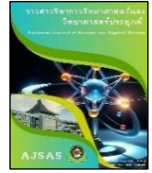




Faculty of Science and Technology, Uttaradit Rajabhat University

วารสารวิชาการวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี ประจำปี 2567

Journal homepage: <https://ajsas.urui.ac.th/>



ผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $(p + 2)^x + 4 \cdot p^y = z^2$

On the solutions of the Diophantine equation $(p + 2)^x + 4 \cdot p^y = z^2$

สุธน ตาดิ*

Suton Tadee*

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเทพสตรี อำเภอเมือง จังหวัดลพบุรี 15000

Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Thepsatri Rajabhat University, Lopburi, 15000, Thailand.

ข้อมูลบทความ

ประวัติบทความ

รับเมื่อ: 27 พฤษภาคม 2567

แก้ไขเมื่อ: 21 มิถุนายน 2567

ตอบรับเมื่อ: 24 มิถุนายน 2567

เผยแพร่ออนไลน์:

25 มิถุนายน 2567

คำสำคัญ

สมการไดโอแฟนไทน์

สมภาค

ส่วนตกค้างกำลังสอง

ทฤษฎีบทของมิไฮเลสคู

*ผู้ประพันธ์บรรณกิจ

อีเมล:

suton.t@lawasri.tru.ac.th

(สุธน ตาดิ)

บทคัดย่อ

ในงานวิจัยนี้ได้ศึกษาหาผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ (x, y, z) ทั้งหมดของสมการไดโอแฟนไทน์ $(p + 2)^x + 4 \cdot p^y = z^2$ เมื่อ p และ $p + 2$ เป็นจำนวนเฉพาะ โดยที่ $\text{ord}_p 2 = p - 1$

ผลการวิจัยพบว่า ถ้า $p = 3$ แล้วสมการดังกล่าวมีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียงผลเฉลยเดียว คือ $(x, y, z) = (1, 0, 3)$ และถ้า $p \neq 3$ แล้วสมการดังกล่าวไม่มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ นอกจากนี้ได้พิสูจน์ว่า ถ้า $p = 17$ แล้วสมการดังกล่าวไม่มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเช่นกัน

ARTICLE INFO

Article History

Received: 27 May 2024

Revised: 21 June 2024

Accepted: 24 June 2024

Available online:

25 June 2024

Keywords:

Diophantine Equation

Congruence

Quadratic Residue

Mihăilescu's Theorem

*Corresponding author

Email address:

suton.t@lawasri.tru.ac.th

(S. Tadee)

ABSTRACT

In this paper, we find all non-negative integer solutions (x, y, z) of the Diophantine equation $(p + 2)^x + 4 \cdot p^y = z^2$, when p and $p + 2$ are prime numbers with $\text{ord}_p 2 = p - 1$.

We show that if $p = 3$, then the equation has the unique non-negative integer solution, which is $(x, y, z) = (1, 0, 3)$. If $p \neq 3$, then the equation has no non-negative integer solution. Moreover, we prove that if $p = 17$, then the equation also has no non-negative integer solution.

1. บทนำ

ในช่วงสิบปีที่ผ่านมา สมการไดโอแฟนไทน์ที่อยู่ในรูป $a^x + b^y = z^2$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนเต็มบวกนั้น ได้รับความสนใจในการหาผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ (x, y, z) อย่างมาก โดยในช่วงแรกจะกำหนด a และ b เช่น $2^x + 5^y = z^2$ [1], $8^x + 13^y = z^2$ [2], $5^x + 43^y = z^2$ [3], $3^x + 13^y = z^2$ [4], $31^x + 41^y = z^2$ [5] และ $7^x + 32^y = z^2$ [6] เป็นต้น หลังจากนั้นได้มีการเพิ่มเงื่อนไข a หรือ b ตัวอย่างเช่น ในปี ค.ศ. 2021 Tangjai and Chubthaisong [7] ได้ศึกษาหาผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบของสมการไดโอแฟนไทน์ $3^x + p^y = z^2$ เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะ โดยที่ $p \equiv 2 \pmod{3}$ ผลการวิจัยส่วนหนึ่ง พบว่า ถ้า $y = 0$ แล้ว $(p, x, y, z) = (p, 1, 0, 2)$ เป็นผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียงผลเฉลยเดียว และถ้า y ทหารไม่ลงตัวด้วย 4 แล้ว $(p, x, y, z) = (2, 0, 3, 3)$ เป็นผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียงผลเฉลยเดียว ในปีเดียวกัน Mina and Bacani [8] ได้ศึกษาผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบของสมการไดโอแฟนไทน์ $p^x + (p + 4k)^y = z^2$ เมื่อ p และ $p + 4k$ เป็นจำนวนเฉพาะ โดยที่ $k \geq 2$ เป็นจำนวนเต็มบวก ต่อมาในปี ค.ศ. 2022 Tadee [9] ได้หาผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบของสมการไดโอแฟนไทน์ $p^x + (p + 14)^y = z^2$ เมื่อ p และ $p + 14$ เป็นจำนวนเฉพาะ และพบว่า ถ้า x เป็นจำนวนคู่ แล้วสมการไม่มีผลเฉลยและถ้า y เป็นจำนวนคู่ แล้วสมการมีผลเฉลยเพียงผลเฉลยเดียว คือ $(p, x, y, z) = (3, 1, 0, 2)$

ในปี ค.ศ. 2023 Tadee and Thaneepoon [10] ได้ศึกษาหาผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบของสมการไดโอแฟนไทน์ $6^x + p^y = z^2$ เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะ ผลการวิจัยส่วนหนึ่งพบว่า ถ้า $p \leq 7$ และ x เป็นจำนวนคู่ แล้วสมการมีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ (p, x, y, z) คือ $(2, 0, 3, 3)$, $(3, 0, 1, 2)$, $(2, 2, 6, 10)$ และ $(3, 4, 6, 45)$ ในขณะเดียวกัน Mina and Bacani [11] ได้พิสูจน์ว่า $(p, x, y, z) = (5, 3, 2, 15)$ เป็นผลเฉลยจำนวนเต็มบวกเพียงผลเฉลยเดียวของสมการไดโอแฟนไทน์ $p^x + (p + 5)^y = z^2$ เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะ และ x, y, z เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่ $x \not\equiv 1 \pmod{12}$ นอกจากนี้ Tadee and Siraworakun [12] ได้ค้นพบเงื่อนไขที่ทำให้สมการไดโอแฟนไทน์ $p^x + (p + 2q)^y = z^2$ เมื่อ p, q และ $p + 2q$ เป็นจำนวนเฉพาะ ไม่มีผลเฉลยจำนวนเต็มบวก ต่อมานักคณิตศาสตร์พิจารณารูปแบบของสมการโดยเพิ่มสัมประสิทธิ์ เช่น Laipaporn, Wananiyakul and Khachorncharoenkul [13] ได้ศึกษาหาผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบของสมการไดโอแฟนไทน์ $3^x + p5^y = z^2$ เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะ ในขณะที่ Thongnak, Chuayjan and Kaewong [14] ได้พิสูจน์ว่า $(x, y, z) = (2, 0, 10)$ เป็นผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียงผลเฉลยเดียวของสมการไดโอแฟนไทน์ $11 \cdot 3^x + 11^y = z^2$

นอกจากนี้ Tangjai, Chaeoueng and Phumchaichot [15] ได้ศึกษาหาผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบของสมการไดโอแฟนไทน์ $7^x + 5 \cdot p^y = z^2$ เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะ โดยที่ $p \equiv 1, 2, 4 \pmod{7}$ และเมื่อไม่นานมานี้ ในปี ค.ศ. 2023 Tadee ได้ศึกษาหาผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบของสมการไดโอแฟนไทน์ $(n + 2)^x + 2 \cdot n^y = z^2$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่ $n \equiv 2, 3 \pmod{4}$ [16] และสมการไดโอแฟนไทน์ $p^x + pq^y = z^2$ เมื่อ p และ q เป็นจำนวนเฉพาะที่แตกต่างกัน [17] ในขณะเดียวกัน Porto, Buosi and Ferreira [18] ได้ศึกษาหาผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบของสมการไดโอแฟนไทน์ $p \cdot 3^x + p^y = z^2$ เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะ

จากงานวิจัยดังกล่าวข้างต้น ทำให้ผู้วิจัยสนใจศึกษาหาผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ (x, y, z) ของสมการไดโอแฟนไทน์ในรูปแบบใหม่ กล่าวคือ

$$(p + 2)^x + 4 \cdot p^y = z^2$$

เมื่อ p และ $p + 2$ เป็นจำนวนเฉพาะ โดยที่ $\text{ord}_p 2 = p - 1$

2. ความรู้พื้นฐาน

สำหรับการศึกษาหาผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบของสมการไดโอแฟนไทน์นั้น ในที่นี้จะใช้ความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับทฤษฎีจำนวน กล่าวคือ สมภาค (Congruence) และส่วนตกค้างกำลังสอง (Quadratic residue) ดังนั้นก่อนอื่นจะขอทบทวนบทนิยามและทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องดังต่อไปนี้

บทนิยาม 1 ([19], p. 63) ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก จะกล่าวว่า สองจำนวนเต็ม a และ b สมภาค หรือ คอนกรูเอนซ์ มอดุโล n เขียนแทนด้วย $a \equiv b \pmod{n}$ เมื่อ n ทหาร $a - b$ ลงตัว

ทฤษฎีบท 1 ([19], p. 65) ให้ $n > 1$ และ a, b, c, d เป็นจำนวนเต็มจะได้ว่า

- 1) $a \equiv a \pmod{n}$
- 2) ถ้า $a \equiv b \pmod{n}$ แล้ว $b \equiv a \pmod{n}$
- 3) ถ้า $a \equiv b \pmod{n}$ และ $b \equiv c \pmod{n}$ แล้ว $a \equiv c \pmod{n}$
- 4) ถ้า $a \equiv b \pmod{n}$ และ $c \equiv d \pmod{n}$

แล้ว $a + b \equiv c + d \pmod{n}$ และ $ab \equiv cd \pmod{n}$

- 5) ถ้า $a \equiv b \pmod{n}$ แล้ว $a + c \equiv b + c \pmod{n}$ และ $ac \equiv bc \pmod{n}$

6) ถ้า $a \equiv b \pmod{n}$ แล้ว $a^k \equiv b^k \pmod{n}$

เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มบวก

ทฤษฎีบท 2 ถ้า z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบแล้ว $z^2 \equiv 0, 1 \pmod{4}$

พิสูจน์ จาก z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ดังนั้น โดยขั้นตอนวิธีการหาร (The division algorithm) จะได้ว่า มีจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ h และ r ซึ่งทำให้ $z = 4h + r$ โดยที่ $r \in \{0, 1, 2, 3\}$

กรณีที่ 1: $r = 0$ จะได้ว่า $z \equiv 0 \pmod{4}$

ดังนั้น $z^2 \equiv 0^2 \equiv 0 \pmod{4}$

กรณีที่ 2: $r = 1$ จะได้ว่า $z \equiv 1 \pmod{4}$

ดังนั้น $z^2 \equiv 1^2 \equiv 1 \pmod{4}$

กรณีที่ 3: $r = 2$ จะได้ว่า $z \equiv 2 \pmod{4}$

ดังนั้น $z^2 \equiv 2^2 \equiv 0 \pmod{4}$

กรณีที่ 4: $r = 3$ จะได้ว่า $z \equiv 3 \pmod{4}$

ดังนั้น $z^2 \equiv 3^2 \equiv 1 \pmod{4}$

ดังนั้นจากทั้งสี่กรณีสรุปได้ว่า $z^2 \equiv 0, 1 \pmod{4}$

บทนิยาม 2 ([19], p. 171) ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะคี่ และ $\gcd(a, p) = 1$ ถ้า $x^2 \equiv a \pmod{p}$ มีผลเฉลย แล้วจะเรียก a ว่าเป็นส่วนตกค้างกำลังสองของ p และ ถ้า $x^2 \equiv a \pmod{p}$ ไม่มีผลเฉลย จะเรียก a ว่าเป็นส่วนตกค้างกำลังสองของ p

ทฤษฎีบท 3 (Euler's criterion) ([19], p. 171) ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะคี่ และ $\gcd(a, p) = 1$ จะได้ว่า a เป็นส่วนตกค้างกำลังสองของ p ก็ต่อเมื่อ $a^{(p-1)/2} \equiv 1 \pmod{p}$

บทนิยาม 3 ([19], p. 147) ให้ $n > 1$ และ $\gcd(a, n) = 1$ จะได้ว่า อันดับของ a มอดุโล n (Order of a modulo n) คือจำนวนเต็มบวกที่น้อยที่สุด k ซึ่งทำให้ $a^k \equiv 1 \pmod{n}$ เขียนแทน k ดังกล่าวด้วย $\text{ord}_n a$

ทฤษฎีบท 4 ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะคี่และ $\gcd(a, p) = 1$ จะได้ว่า ถ้า $\text{ord}_p a = p - 1$ แล้ว $a^{(p-1)/2} \equiv -1 \pmod{p}$

พิสูจน์ ให้ $\text{ord}_p a = p - 1$ เพราะฉะนั้น $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ จะได้ว่า $p \mid (a^{(p-1)/2} - 1)(a^{(p-1)/2} + 1)$ และเนื่องจาก p เป็นจำนวนเฉพาะ ดังนั้น $p \mid (a^{(p-1)/2} - 1)$ หรือ $p \mid (a^{(p-1)/2} + 1)$

สมมติว่า $p \mid (a^{(p-1)/2} - 1)$ ดังนั้น $a^{(p-1)/2} \equiv 1 \pmod{p}$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เพราะ $\text{ord}_p a = p - 1$ และ $(p -$

$1)/2 < p - 1$ ดังนั้น $p \nmid (a^{(p-1)/2} + 1)$ นั่นคือ $a^{(p-1)/2} \equiv -1 \pmod{p}$

นอกจากนี้จะนำเสนอทฤษฎีบทที่มีบทบาทสำคัญในการหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ กล่าวคือ

ทฤษฎีบท 5 (Mihăilescu's Theorem) [20]

สมการไดโอแฟนไทน์ $a^x - b^y = 1$ เมื่อ a, b, x และ y เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ $\min\{a, b, x, y\} > 1$ มีผลเฉลยเพียงผลเฉลยเดียว คือ $(a, b, x, y) = (3, 2, 2, 3)$

3. เนื้อหาหลัก (Main Results)

ทฤษฎีบท 6 ให้ q และ p เป็นจำนวนเฉพาะคี่ที่แตกต่างกันโดยที่ $q > p$ จะได้ว่า ถ้าสมการไดโอแฟนไทน์

$$q^x + 4 \cdot p^y = z^2 \quad (1)$$

มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ (x, y, z) แล้ว x เป็นจำนวนคี่

พิสูจน์ ให้ x, y และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบและเป็นผลเฉลยของสมการ (1) สมมติว่า x เป็นจำนวนคู่ ดังนั้นจะมีจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ k ซึ่งทำให้ $x = 2k$ เพราะฉะนั้นจากสมการ (1) จะได้ว่า

$$z^2 - q^{2k} = 4 \cdot p^y \quad (2)$$

$$(z - q^k)(z + q^k) = 4 \cdot p^y \quad (3)$$

และเนื่องจาก p เป็นจำนวนเฉพาะคี่ ดังนั้น $\gcd(4, p^y) = 1$ เพราะฉะนั้น จากสมการ (3) จะมีจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ $u \leq 2$ และ $v \leq y$ ซึ่งทำให้

$$z - q^k = 2^u \cdot p^v \quad (4)$$

$$z + q^k = 2^{2-u} \cdot p^{y-v} \quad (5)$$

และจากสมการ (4) และ (5) จะได้ว่า

$$2 \cdot q^k = 2^{2-u} \cdot p^{y-v} - 2^u \cdot p^v \quad (6)$$

ถ้า $u = 0$ จะได้ว่า $2 \cdot q^k = 2^2 \cdot p^{y-v} - p^v$ เพราะฉะนั้น $2 \mid p^v$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เนื่องจาก p เป็นจำนวนเฉพาะคี่

ถ้า $u = 2$ จะได้ว่า $2 \cdot q^k = p^{y-v} - 2^2 \cdot p^v$ ดังนั้น $2 \mid p^{y-v}$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เนื่องจาก p เป็นจำนวนเฉพาะคี่

ดังนั้น $u = 1$ จะได้ว่า $2 \cdot q^k = 2 \cdot p^{y-v} - 2 \cdot p^v$ ทำให้

$$q^k = p^{y-v} - p^v \quad (7)$$

ถ้า $y - v > 0$ และ $v > 0$ จะได้ว่า $p \mid q^k$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เนื่องจาก q และ p เป็นจำนวนเฉพาะคี่ที่แตกต่างกัน เพราะฉะนั้น $y - v = 0$ หรือ $v = 0$

กรณีที่ 1: $y - v = 0$ ดังนั้น $y = v$ และจากสมการ (7) จะได้ว่า $q^k = 1 - p^y$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ จาก $q^k > 0$ แต่ $1 - p^y \leq 0$

กรณีที่ 2: $v = 0$ จากสมการ (7) จะได้ว่า

$$q^k = p^y - 1 \quad \text{หรือ} \quad p^y - q^k = 1 \quad (8)$$

กรณีที่ 2.1: $y = 0$ จากสมการ (8) จะได้ว่า $q^k = 0$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้

กรณีที่ 2.2: $y = 1$ จากสมการ (8) จะได้ว่า $p - q^k = 1$ และจาก $q > p$ ดังนั้น $k = 0$ เพราะฉะนั้น $p = 2$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เนื่องจาก p เป็นจำนวนเฉพาะ

กรณีที่ 2.3: $y > 1$

กรณีที่ 2.3.1: $k = 0$ จากสมการ (8) จะได้ว่า $p^y = 2$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เพราะ p เป็นจำนวนเฉพาะ

กรณีที่ 2.3.2: $k = 1$ จากสมการ (8) จะได้ว่า $p^y - q = 1$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เนื่องจาก q, p เป็นจำนวนคี่ และ $y > 1$ เพราะฉะนั้น $p^y - q$ เป็นจำนวนคู่

กรณีที่ 2.3.3: $k > 1$ จากสมการ (8) และทฤษฎีบท 5 จะได้ว่า $q = 2$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เนื่องจาก q เป็นจำนวนคี่

ทฤษฎีบท 7 ให้ p และ $p + 2$ เป็นจำนวนเฉพาะ โดยที่ $\text{ord}_p 2 = p - 1$ จะได้ว่า สมการไดโอแฟนไทน์

$$(p + 2)^x + 4 \cdot p^y = z^2 \quad (9)$$

มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียงผลเฉลยเดียว คือ $(x, y, z) = (1, 0, 3)$ เมื่อ $p = 3$ และไม่มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ เมื่อ $p \neq 3$

พิสูจน์ ให้ x, y และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบและเป็นผลเฉลยของสมการ (9) เนื่องจาก p และ $p + 2$ เป็นจำนวนเฉพาะ ดังนั้น p และ $p + 2$ เป็นจำนวนเฉพาะที่ต่างกัน เพราะฉะนั้น จากทฤษฎีบท 6 จะได้ว่า x เป็นจำนวนคี่

กรณีที่ 1: $y = 0$ จากสมการ (9) จะได้ว่า

$$(p + 2)^x = z^2 - 2^2 = (z - 2)(z + 2) \quad (10)$$

และเนื่องจาก $p + 2$ เป็นจำนวนเฉพาะ ดังนั้นจะมีจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ u ซึ่งทำให้

$$z - 2 = (p + 2)^u \quad (11)$$

$$z + 2 = (p + 2)^{x-u} \quad (12)$$

จากสมการ (11) และ (12) จะได้ว่า $x - u \geq u$ หรือ $x \geq 2u$ และ

$$4 = (p + 2)^u [(p + 2)^{x-u} - 1] \quad (13)$$

และจาก $p + 2$ เป็นจำนวนเฉพาะคี่ ดังนั้น $(p + 2) \nmid 4$ เพราะฉะนั้น $u = 0$ จะได้ว่า

$$4 = (p + 2)^x - 1 \quad \text{หรือ} \quad (p + 2)^x = 5 \quad (14)$$

ดังนั้น $x = 1$ และ $p = 3$ เพราะฉะนั้นจากสมการ (9) จะได้ว่า $z = 3$ นั่นคือ $(x, y, z) = (1, 0, 3)$ เมื่อ $p = 3$

กรณีที่ 2: $y > 0$ ดังนั้น $4 \cdot p^y \equiv 0 \pmod{p}$ และเนื่องจาก $(p + 2)^x \equiv 2^x \pmod{p}$ เพราะฉะนั้น

$$(p + 2)^x + 4 \cdot p^y \equiv 2^x \pmod{p}$$

และจากสมการ (9) จะได้ว่า $z^2 \equiv 2^x \pmod{p}$

ดังนั้น 2^x เป็นส่วนตกค้างกำลังสองของ p และโดยทฤษฎีบท 3 จะได้ว่า

$$(2^x)^{(p-1)/2} \equiv 1 \pmod{p} \quad \text{หรือ} \quad (2^{(p-1)/2})^x \equiv 1 \pmod{p}$$

และจาก $\text{ord}_p 2 = p - 1$ ดังนั้นจากทฤษฎีบท 4 จะได้ว่า

$$2^{(p-1)/2} \equiv -1 \pmod{p}$$

เพราะฉะนั้น $(-1)^x \equiv 1 \pmod{p}$ ดังนั้น x เป็นจำนวนคู่ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เนื่องจาก x เป็นจำนวนคี่

บทแทรก 8 สมการไดโอแฟนไทน์ $5^x + 4 \cdot 3^y = z^2$ มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียงผลเฉลยเดียว คือ $(x, y, z) = (1, 0, 3)$

พิสูจน์ จาก 3 และ 5 เป็นจำนวนเฉพาะ โดยที่ $\text{ord}_3 2 = 2$ ดังนั้นจากทฤษฎีบท 7 จะได้ว่า สมการไดโอแฟนไทน์ $5^x + 4 \cdot 3^y = z^2$ มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียงผลเฉลยเดียว คือ $(x, y, z) = (1, 0, 3)$

บทแทรก 9 สมการไดโอแฟนไทน์ $7^x + 4 \cdot 5^y = z^2$ ไม่มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

พิสูจน์ จาก 5 และ 7 เป็นจำนวนเฉพาะ โดยที่ $\text{ord}_5 2 = 4$ ดังนั้นจากทฤษฎีบท 7 จะได้ว่า สมการไดโอแฟนไทน์ $7^x + 4 \cdot 5^y = z^2$ ไม่มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

นอกจากนี้จะยกตัวอย่างการพิสูจน์ในกรณีที่ p และ $p + 2$ เป็นจำนวนเฉพาะ แต่ $\text{ord}_p 2 \neq p - 1$ กล่าวคือ $p = 17$ เพราะฉะนั้น $p + 2 = 19$ และ $\text{ord}_{17} 2 = 8$ ดังนี้

ทฤษฎีบท 10 สมการไดโอแฟนไทน์ $19^x + 4 \cdot 17^y = z^2$ ไม่มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

พิสูจน์ สมมติว่ามีจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ x, y และ z ซึ่งทำให้

$$19^x + 4 \cdot 17^y = z^2 \quad (15)$$

จากทฤษฎีบท 6 จะได้ว่า x เป็นจำนวนคี่ ดังนั้น $19^x \equiv (-1)^x \equiv -1 \equiv 3 \pmod{4}$ และเนื่องจาก $4 \cdot 17^y \equiv 0 \pmod{4}$ จะได้ว่า $19^x + 4 \cdot 17^y \equiv 3 + 0 \equiv 3 \pmod{4}$ และจากสมการ (15) ดังนั้น $z^2 \equiv 3 \pmod{4}$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เนื่องจากทฤษฎีบท 2

กิตติกรรมประกาศ (Acknowledgment)

ขอขอบคุณ สถาบันวิจัยและพัฒนา และคณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเทพสตรี ที่ให้การสนับสนุนการทำวิจัยในครั้งนี้

เอกสารอ้างอิง

- [1] Acu, D. (2007). On a Diophantine equation $2^x + 5^y = z^2$. *General Mathematics*, 15(4), 145-148.
- [2] Sroysang, B. (2014). On the Diophantine equation $8^x + 13^y = z^2$. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 90(1), 69-72.
- [3] Sroysang, B. (2014). On the Diophantine equation $5^x + 43^y = z^2$. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 91(4), 537-540.
- [4] Asthana, S. and Singh, M.M. (2017). On the Diophantine equation $3^x + 13^y = z^2$. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 114(2), 301-304.
- [5] Kumar, S., Gupta, D. and Kishan, H. (2018). On the non-linear Diophantine equations $31^x + 41^y = z^2$ and $61^x + 71^y = z^2$. *Annals of Pure and Applied Mathematics*, 18(2), 185-188.
- [6] Borah, P.B. and Dutta, M. (2022). On the Diophantine equation $7^x + 32^y = z^2$ and its generalization. *Integers*, 22, 1-5.
- [7] Tangjai, W. and Chubthaisong, C.(2021). On the Diophantine equation $3^x + p^y = z^2$ where $p \equiv 2 \pmod{3}$. *WSEAS Transactions on Mathematics*, 20, 283-287.
- [8] Mina, R.J.S. and Bacani, J.B. (2021). On the solutions of the Diophantine equation $p^x + (p + 4k)^y = z^2$ for prime pairs p and $p + 4k$. *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, 14(2), 471-479.
- [9] Tadee, S. (2022). On the Diophantine equation $p^x + (p + 14)^y = z^2$ where $p, p + 14$ are primes. *Annals of Pure and Applied Mathematics*, 26(2), 125-130.
- [10] Tadee, S. and Thaneepoon, N. (2023). On the Diophantine equation $6^x + p^y = z^2$, where p is prime. *International Journal of Mathematics and Computer Science*, 18(4), 737-741.
- [11] Mina, R.J.S. and Bacani, J.B. (2023). On the Diophantine equation $p^x + (p + 5)^y = z^2$, where p is odd prime. *Thai Journal of Mathematics*, 21(1), 67-75.
- [12] Tadee, S. and Siraworakun, A. (2023). Non-existence of positive integer solutions of the Diophantine equation $p^x + (p + 2q)^y = z^2$, where p, q and $p + 2q$ are prime numbers. *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, 16(2), 724-735.
- [13] Laipaporn, K., Wananiyakul, S. and Khachorncharoenkul, P. (2019). On the Diophantine equation $3^x + p5^y = z^2$. *Walailak Journal of Science and Technology*, 16(9), 647-653.
- [14] Thongnak, S., Chuayjan, W. and Kaewong, T. (2022). On the Diophantine equation $11 \cdot 3^x + 11^y = z^2$ where x, y and z are non-negative integers. *Annals of Pure and Applied Mathematics*, 25(1), 51-54.
- [15] Tangjai, W., Chaeoueng, S. and Phumchaichot, N. (2022). On the Diophantine equation $7^x + 5 \cdot p^y = z^2$, where $p \equiv 1, 2, 4 \pmod{7}$. *International Journal of Mathematics and Computer Science*, 17(4), 1483-1489.
- [16] Tadee, S. (2023). On the Diophantine equations $(n + 2)^x - 2 \cdot n^y = z^2$ and $(n + 2)^x + 2 \cdot n^y = z^2$. *Annals of Pure and Applied Mathematics*, 27(1), 19-22.
- [17] Tadee, S. (2023). Solutions of the Diophantine equation $p^x + pq^y = z^2$, where p and q are distinct prime numbers. *Journal of Science and Technology, Ubon Ratchathani University*, 25(1), 57-61. (in Thai)
- [18] Porto, A., Buosi, M. and Ferreira, G. (2023). On the exponential Diophantine equation $p \cdot 3^x + p^y = z^2$ with p a prime number. *Annals of Pure and Applied Mathematics*, 28(1), 13-19.

- [19] Burton, D.M. (2010). *Elementary Number Theory*. 7th ed., New York: McGraw-Hill.
- [20] Mihăilescu, P. (2004). Primary cyclotomic units and a proof of Catalan's conjecture. *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, 572, 167-195.