

$$\text{ผลเฉลยที่เป็นจำนวนนับของสมการไดโอแฟนไทน์} \quad \frac{1}{w} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{u}{u+1}$$

วัชรพงศ์ วงศ์บุรีรักษ์* และเอกพงษ์ ดวงดา

ภาควิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเชียงใหม่

บทคัดย่อ

ในงานวิจัยนี้ผู้วิจัยได้ศึกษาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $\frac{1}{w} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{u}{u+1}$ ภายใต้เงื่อนไข

$w \leq x \leq y \leq z$ และ $u, w, x, y, z \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ ผลการศึกษาพบว่าผลเฉลยทั้งหมดมีอยู่ 18 ผลเฉลย และยังพบว่าเมื่อ $u = 6$ แล้วสมการไม่มีผลเฉลย

*ผู้เขียนหลัก : wacharong_won@cmru.ac.th

คำสำคัญ : สมการไดโอแฟนไทน์ ผลเฉลยของสมการ อสมการ

SCIENCE AND TECHNOLOGY
UTTARADIT RAJABHAT UNIVERSITY

The Natural Number Solutions of the Diophantine Equation $\frac{1}{w} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{u}{u+1}$

Wacharong Wongsanurak* and Eakkapong Duangdai

Mathematics and Statistics, Department Faculty of Science and Technology, Chiang Mai Rajabhat University

Abstract

In this research, we have studied the solutions of the Diophantine equation $\frac{1}{w} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{u}{u+1}$ under condition $w \leq x \leq y \leq z$ and $u, w, x, y, z \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}$. We obtained that the equation has 18 solutions and when $u = 6$, then has no solution.

*Corresponding Author: wacharong_won@cmru.ac.th

Keywords: Diophantine equation, solution of equation, inequality

SCIENCE AND TECHNOLOGY
UTTARADIT RAJABHAT UNIVERSITY

1. บทนำ

สมการไดโอแฟนไทน์ (Diophantine equation) คือสมการที่อยู่ในรูป

$$f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0 \quad (1)$$

โดยที่ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันที่มี n ตัวแปรซึ่ง $n \geq 2$ และผลเฉลยของสมการ (1) คือ $(x_1^0, x_2^0, x_3^0, \dots, x_n^0) \in \mathbb{Z}^n$ ตามความหมายของ Andreescu และคณะ^[1] ในขณะที่ทฤษฎีบทของ Linnik^[2] ได้ให้นิยามของสมการไดโอแฟนไทน์ว่าคือสมการใด ๆ ที่มีตัวแปรหนึ่งตัวหรือมากกว่าหนึ่งตัว และมีผลเฉลยเป็นจำนวนเต็ม สมการไดโอแฟนไทน์สามารถจำแนกออกได้ 3 กลุ่ม^[3] ตามผลเฉลยของสมการ อันประกอบไปด้วย กลุ่มที่ 1 ไม่มีผลเฉลย กลุ่มที่ 2 มีผลเฉลยแบบจำกัดและกลุ่มที่ 3 มีผลเฉลยมากมายนับไม่ถ้วน ตัวอย่างเช่น $6x - 9y = 29$ จะไม่สามารถหาผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มได้ ในขณะที่ $2x - 3y = 10$ จะมีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มคือ $(20, 10)$ แต่จะมีผลเฉลยมากมายนับไม่ถ้วนเมื่อ $x = 20 + 3n, y = 10 + 2n$ สำหรับทุกจำนวนเต็ม n เป็นต้น

การศึกษาเกี่ยวกับการหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์เป็นไปอย่างแพร่หลาย และมีหลากหลายรูปแบบ ส่งผลให้มีวิธีที่ใช้สำหรับหาผลเฉลยหลายวิธี โดยมีวิธีพื้นฐานที่ใช้ในการหาคำตอบของสมการไดโอแฟนไทน์^[3] เช่น วิธีการแยกตัวประกอบ (factoring method) วิธีการหาคำตอบโดยใช้คุณสมบัติการไม่เท่ากัน (inequality) การใช้เทคนิคการปรับแต่งค่าพารามิเตอร์ (parametric method) เทคนิคการใช้ทฤษฎีจำนวนเพื่อแก้ปัญหา (modular arithmetic method) หรือใช้วิธีอุปนัยทางคณิตศาสตร์ (mathematical induction) ซึ่งในการหาผลเฉลยดังกล่าวจะขึ้นอยู่กับรูปแบบของสมการเป็นหลัก Tengely และคณะ^[4] ได้ศึกษาการหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์

$$\frac{n}{2^n} = \sum_{i=1}^k \frac{a_i}{2^{a_i}} \quad (2)$$

ด้วยเงื่อนไข $n, k, a_1, a_2, \dots, a_k$ เป็นจำนวนเต็มและสอดคล้องกับค่า $k \geq 2$ โดยที่ $a_i < a_{i+1}$ สำหรับค่า $i = 1, 2, 3, \dots, k-1$ ซึ่งผลการศึกษาสามารถผลเฉลยภายใต้เงื่อนไข $k \leq 8$ ได้

Yamamoto^[5] ศึกษาสมการไดโอแฟนไทน์

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{4}{n} \quad (3)$$

ในขณะที่ Naranan^[6] ได้ศึกษาสมการไดโอแฟนไทน์

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{u}{u+1} \quad (4)$$

ภายใต้เงื่อนไข 2 เงื่อนไขคือ x, y และ z มีค่าไม่เท่ากัน และ $u+1$ เป็นตัวคูณร่วมน้อยของ x, y และ z ซึ่งจากเงื่อนไขดังกล่าวสามารถหาผลเฉลยที่เป็นจำนวนนับได้เพียง 7 ผลเฉลยเท่านั้น อย่างไรก็ตามการหาผลเฉลยโดยทั่วไปแบบไม่มีเงื่อนไขของสมการ (4) ยังไม่มีผู้ศึกษานำเสนอวิธีการหาแต่อย่างใด นอกจากนี้ Naranan ได้พิจารณาสมการ 1 โดยเปลี่ยนรูปแบบของสมการเป็น

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \dots + \frac{1}{x_n} = \frac{2^{n-1}}{2^n} \quad (5)$$

โดยที่ $x_i = 2^i, i = 1, 2, 3, \dots, n$ ทำให้ทราบว่าผลเฉลยทั่วไปของสมการ (5) มีได้หลายคำตอบ

ในงานวิจัยนี้ คณะผู้วิจัยได้ขยายสมการไดโอแฟนไทน์ (4) โดยการเพิ่มตัวแปร 1 ตัวคือ w ทำให้ได้สมการ

$$\frac{1}{w} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{u}{u+1} \quad (6)$$

ภายใต้เงื่อนไข $w \leq x \leq y \leq z$ และ $u, w, x, y, z \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ โดยผลการศึกษาในครั้งนี้จะเป็นจุดเริ่มต้นในการหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ (6) ที่มีแบบแผนต่อไปในภายภาคหน้า

2. ความรู้พื้นฐาน

บทนิยาม^[2] สมการไดโอแฟนไทน์ (Diophantine equation) คือ สมการใด ๆ ที่มีตัวแปรหนึ่งตัวแปรหรือมากกว่า และมีผลเฉลยเป็นจำนวน

ทฤษฎีบท^[7] สำหรับจำนวนเต็ม x และ y ที่มากกว่าศูนย์จะได้ว่า

$$1. \text{ ถ้า } x \leq y \text{ แล้ว } \frac{1}{x} \geq \frac{1}{y}$$

$$2. \text{ ถ้า } x \geq y \text{ แล้ว } \frac{1}{x} \leq \frac{1}{y}$$

3. เนื้อหาหลัก

พิจารณาผลเฉลยของสมการ (6) ภายใต้เงื่อนไข

$$w \leq x \leq y \leq z \quad (7)$$

และ $u, w, x, y, z \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}$

จากเงื่อนไข (7) จะได้ว่า

$$\frac{1}{w} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq \frac{1}{w} + \frac{1}{w} + \frac{1}{w} + \frac{1}{w} = \frac{4}{w} \quad (8)$$

และ

$$\frac{1}{w} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{1}{z} + \frac{1}{z} + \frac{1}{z} + \frac{1}{z} = \frac{4}{z} \quad (9)$$

จากสมการ (8) และ (9) จะได้ว่า

$$\frac{4}{z} \leq \frac{1}{w} + \frac{1}{w} + \frac{1}{w} + \frac{1}{w} \leq \frac{4}{w} \quad (10)$$

แทนค่าสมการ (6) ในสมการ (10)

$$\begin{aligned} \frac{u}{u+1} &\leq \frac{4}{w} \\ uw &\leq 4(u+1) \\ u(w-4) &\leq 4 \end{aligned} \quad (11)$$

เนื่องจาก $u \geq 1$ พิจารณา $u = 1$ และแทนค่าลงในสมการ (11) จะได้

$$1(w-4) \leq 4 \quad (12)$$

สมการ (12) จะเป็นจริงเมื่อ $w = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$

เมื่อพิจารณา $w = 1$ และแทนค่าลงในสมการ (6) จะได้ว่า

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{u}{u+1}$$

ซึ่ง $1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \neq \frac{u}{u+1}$ (เนื่องจาก $\frac{u}{u+1} < 1$)

เมื่อพิจารณาค่า $w = 9$ และแทนค่าลงในสมการ (11)

$$u(9-4) \leq 4$$

$$5u \leq 4$$

$$u \leq \frac{4}{5}$$

ซึ่งขัดแย้งกับเงื่อนไข $u \geq 1$ ดังนั้นค่าของ w ที่เป็นไปได้คือ $w = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$

ต่อไปจะแสดงการพิจารณากรณีของ u และ w ที่เป็นไปได้ทั้งหมด ได้ตามตารางที่ 1

ตารางที่ 1 แสดงความสัมพันธ์ของค่า u และ w ที่เป็นไปได้เพื่อใช้ในการพิจารณาหาผลเฉลยของสมการ (6)

u	w
1	2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
2	2, 3, 4, 5, 6
3	2, 3, 4, 5
4	2, 3, 4, 5
5	2, 3, 4
6	2, 3, 4
7	2, 3, 4
8	2, 3, 4
9	2, 3, 4

กระบวนการในการพิจารณาเพื่อหาผลเฉลยของสมการที่ (6) จะใช้วิธีการพิจารณาเป็นรายกรณี ดังตัวอย่างต่อไปนี้

กรณีที่ 1 $u = 1$

กรณีย่อย $u = 1, w = 2$

แทนค่า $u = 1, w = 2$ ลงในสมการ (6) จะได้ว่า

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{1+1}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

ดังนั้นกรณี $u = 1, w = 2$ ไม่มีค่า x, y, z ที่ทำให้สมการ $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$ เป็นจริง

กรณีย่อย $u = 1, w = 3$

แทนค่า $u = 1, w = 3$ ลงในสมการ (6) จะได้ว่า

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{1+1}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \quad (13)$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{6} \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} = \frac{3}{x}$$

ดังนั้น $\frac{1}{6} \leq \frac{3}{x}$
 นั่นคือ $x \leq 18$

จากเงื่อนไขของสมการ (7) จะได้ค่าของ x คือ $x = 3, 4, 5, 6, 7, 9$

แทน $x = 3$ ลงในสมการ (13)

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{6} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{6} \quad (14)$$

จากสมการ (14) พบว่าไม่มีค่าของ y และ z ที่ทำให้สมการเป็นจริง

ในทำนองเดียวกันเมื่อแทน $x = 4, 5, 6, 7, 8$ และ 9 ลงในสมการ (13) จะได้ว่า

ถ้า $x = 4$ แล้วจะไม่มีค่าของ y และ z ที่ทำให้สมการ $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = -\frac{1}{12}$ เป็นจริง

ถ้า $x = 5$ แล้วจะไม่มีค่าของ y และ z ที่ทำให้สมการ $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = -\frac{1}{30}$ เป็นจริง

ถ้า $x = 6$ แล้วจะไม่มีค่าของ y และ z ที่ทำให้สมการ $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$ เป็นจริง

ถ้า $x = 7$ แล้วค่าของ $y \leq 84$ จะได้ $y = 7, 8, 9$ แต่ไม่สามารถหาค่า z ได้

ถ้า $x = 8$ แล้วค่าของ $y \leq 48$ จะได้ $y = 8, 9$ แต่ไม่สามารถหาค่า z ได้

ถ้า $x = 9$ แล้วค่าของ $y \leq 36$ จะได้ $y = 9$ แต่ไม่สามารถหาค่า z ได้

ดังนั้นกรณี $u = 1, w = 3$ จึงไม่มีค่า x, y, z ที่ทำให้สมการ $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{6}$ เป็นจริง

เมื่อทำการพิจารณาในทุกๆ กรณีและกรณีย่อยแล้ว สามารถสรุปผลในแต่ละกรณีที่สมการหาค่าของ x, y และ z ได้ดังตารางที่ 2

ตารางที่ 2 แสดงผลการพิจารณาผลเฉลย x, y และ z ตามรายการกรณีและกรณีย่อย

กรณี	กรณีย่อย	ค่าของ x	ค่าของ y	ค่าของ z
$u = 1$	$w = 6$	9	9	9
	$w = 8$	8	8	8
$u = 2$	$w = 3$	9	9	9
	$w = 4$	6	8	8
	$w = 6$	6	6	6
$u = 3$	$w = 3$	6	8	8
	$w = 4$	4	8	8
	$w = 4$	6	6	6
$u = 4$	$w = 5$	5	5	5
$u = 5$	$w = 2$	9	9	9
	$w = 3$	4	8	8

	$w = 3$	6	6	6
	$w = 4$	4	6	6
$u = 7$	$w = 2$	8	8	8
	$w = 3$	4	6	8
$u = 8$	$w = 2$	6	9	9
	$w = 3$	3	9	9
$u = 9$	$w = 4$	4	5	5

4. สรุปผลการวิจัย

สมการไดโอแฟนไทน์ $\frac{1}{w} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{u}{u+1}$ เมื่อกำหนดเงื่อนไข $w \leq x \leq y \leq z$ และ

$u, w, x, y, z \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ จะสามารถหาผลเฉลยได้ทั้งหมด 18 ผลเฉลย ดังนี้

$$u = 1, w = 6, x = 9, y = 9, z = 9$$

$$u = 5, w = 2, x = 9, y = 9, z = 9$$

$$u = 1, w = 8, x = 8, y = 8, z = 8$$

$$u = 5, w = 3, x = 4, y = 8, z = 8$$

$$u = 2, w = 3, x = 9, y = 9, z = 9$$

$$u = 5, w = 3, x = 6, y = 6, z = 6$$

$$u = 2, w = 4, x = 6, y = 8, z = 8$$

$$u = 5, w = 4, x = 4, y = 6, z = 6$$

$$u = 2, w = 6, x = 6, y = 6, z = 6$$

$$u = 7, w = 2, x = 8, y = 8, z = 8$$

$$u = 3, w = 3, x = 6, y = 8, z = 8$$

$$u = 7, w = 3, x = 4, y = 6, z = 8$$

$$u = 3, w = 4, x = 4, y = 8, z = 8$$

$$u = 8, w = 2, x = 6, y = 9, z = 9$$

$$u = 3, w = 4, x = 6, y = 6, z = 6$$

$$u = 8, w = 3, x = 3, y = 9, z = 9$$

$$u = 4, w = 5, x = 5, y = 5, z = 5$$

$$u = 9, w = 4, x = 4, y = 5, z = 5$$

ทั้งนี้ยังพบว่ากรณี $u = 6$ นั้นสมการ (6) จะไม่มีผลเฉลย

เอกสารอ้างอิง

- [1] Andreescu, T., Andrica, D., & Cucurezeanu, I. (2010). An Introduction to Diophantine Equations: A Problem-Based Approach.
- [2] นพพร ณะชัยขันธ. (2543). ทฤษฎีจำนวน. กรุงเทพฯ : วิทยพัฒน์.
- [3] Britannica, T. Editors of Encyclopaedia (2014, November 26). *Diophantine equation*. *Encyclopedia Britannica*. <https://www.britannica.com/science/Diophantine-equation>
- [4] Tengely, S., Ulas, M., & Zygadlo, J. (2020). On a Diophantine equation of Erdős and Graham. *Journal of Number Theory*, 217, 445–459.
- [5] Yamamoto, K. (1965). On The Diophantine Equation $4/n = 1/x + 1/y + 1/z$. *Memoirs of the Faculty of Science. Kyushu University. Series a. Mathematics*, 19(1), 37–47.

[6] Naranan, S. (1973). An "Elephantine" equation. *Mathematics Magazine*, 46(5), 276-278.

[7] วสันต์ จินดารัตนาภรณ์. (2549). ทฤษฎีจำนวน. เชียงใหม่ : คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเชียงใหม่.



SCIENCE AND TECHNOLOGY
UTTARADIT RAJABHAT UNIVERSITY