

สมการไดโอแฟนไทน์ $12^x - p^y = z^2$ เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะON THE DIOPHANTINE EQUATION $12^x - p^y = z^2$ WHERE p IS PRIMEศิริจันทร์ เวสารัชศาศต*¹ นิชนันท์ ปันวงศ์¹ อจิรวดี ผ่านพิณ¹ สุปรียา ใฝ่งาม¹Sirichan Vesarachasart*¹, Nichanan Panwong¹, Achirawadee Panphinit¹, Supreeya Paingam¹¹สาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์¹ Department of Mathematics and Statistics, Faculty of Science and Technology, Thammasat University

* E-mail ผู้รับผิดชอบบทความ (Corresponding Author): sirichan@mathstat.sci.tu.ac.th

วันที่รับบทความ 10 พฤศจิกายน 2568 วันที่แก้ไขบทความ 8 พฤษภาคม 2569 วันที่ตอบรับบทความ 14 มิถุนายน 2569

บทคัดย่อ

การศึกษาสมการไดโอแฟนไทน์ได้รับความสนใจอย่างกว้างขวางจากนักคณิตศาสตร์และนักวิจัย สมการไดโอแฟนไทน์รูปแบบที่ได้รับความสนใจศึกษาเป็นอย่างมาก คือ สมการเลขชี้กำลังที่อยู่ในรูป $a^x + b^y = z^2$ เมื่อ a, b เป็นจำนวนเต็มบวก และ x, y, z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ หรือสนใจศึกษากรณีที่ a, b, x, y, z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบที่สอดคล้องกับเงื่อนไขบางประการ ต่อมาผู้วิจัยได้เริ่มหันมาศึกษาสมการไดโอแฟนไทน์ที่อยู่ในรูปแบบ $a^x - b^y = z^2$ โดยที่ a, b, x, y, z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบที่มีสมบัติบางประการ ซึ่งส่วนใหญ่มักพิจารณาในกรณี a, b เป็นจำนวนเฉพาะ ในงานวิจัยนี้สนใจศึกษาสมการไดโอแฟนไทน์ $12^x - p^y = z^2$ เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะ และ x, y, z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบที่ $x + y \leq 4$ สำหรับการศึกษานี้อาศัยความรู้ทางทฤษฎีจำนวนเฉพาะ สมภาค โดยแบ่งการพิจารณาเป็น 3 กรณี ได้แก่ กรณี $x = 0$ กรณี $y = 0$ และกรณี $0 < x + y \leq 4$ ผลจากการศึกษาพบว่า กรณี $x = 0$ หรือ $y = 0$ สมการนี้มีผลเฉลย คือ $(p, x, y, z) = (p, 0, 0, 0)$ ส่วนกรณี $0 < x + y \leq 4$ พบว่า สมการนี้มีผลเฉลย (p, x, y, z) ที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบทั้งหมด 13 ผลเฉลย และในตอนท้ายยังได้พิจารณากรณี x เป็นจำนวนเต็มคู่ ซึ่งพบผลเฉลย (p, x, y, z) เพิ่มขึ้นอีก 1 ผลเฉลย คือ $(2, 4, 13, 112)$

คำสำคัญ: สมการไดโอแฟนไทน์; จำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ; จำนวนเฉพาะ

ABSTRACT

The study of Diophantine equations has attracted substantial attention from mathematicians and researchers. A prominent form of the exponential equation $a^x + b^y = z^2$ where a, b are positive integers and x, y, z are non-negative integers, or a, b, x, y, z are non-negative integers satisfying certain additional constraints. More recently, research interest has shifted towards the form of Diophantine equation, namely $a^x - b^y = z^2$ under various conditions imposed on non-

negative integers a, b, x, y and z , frequently with a and b are prime numbers. In this study, we focus on the Diophantine equation $12^x - p^y = z^2$ where p is a prime number and x, y, z are non-negative integers with $x + y \leq 4$. The investigation relies on concepts of number theory, prime number, congruence and we have divided into three cases, $x = 0, y = 0$ and $0 < x + y \leq 4$. The results of this study show that in the case $x = 0$ or $y = 0$, the solution is $(p, x, y, z) = (p, 0, 0, 0)$. For the case $0 < x + y \leq 4$, the equation has exactly 13 non-negative integers solutions (x, y, z, p) . Furthermore, the study extends its consideration to cases where x is an even integer, revealing an additional solution $(p, x, y, z) = (2, 4, 13, 112)$.

Keywords: Diophantine equation; non-negative integer; prime number

1. บทนำ

สมการไดโอแฟนไทน์เป็นหัวข้อวิจัยที่มีผู้ให้ความสนใจศึกษาเป็นจำนวนมาก มีการศึกษาวิจัยมากมายเพื่อแสดงวิธีการหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ในรูปแบบต่าง ๆ เช่น ในปี ค.ศ. 2012 Sroysang [1] ได้ศึกษาสมการไดโอแฟนไทน์ $3^x + 5^y = z^2$ ซึ่งผลจากการศึกษาพบว่าสมการนี้มีผลเฉลย (x, y, z) ที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียงผลเฉลยเดียว คือ $(1, 0, 2)$ ในปีถัดมา [2] เขาได้พิสูจน์ว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $5^x + 7^y = z^2$ ไม่มีผลเฉลย x, y, z ที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ หลังจากนั้นในปีต่อมา [3] เขายังได้ศึกษาสมการไดโอแฟนไทน์ในรูปแบบคล้ายกัน คือ $3^x + 45^y = z^2$ ซึ่งเขาพบว่าสมการนี้มีผลเฉลยเพียงผลเฉลยเดียวเท่านั้น คือ $(x, y, z) = (1, 0, 2)$ ในปีเดียวกันนี้ [4] เขายังได้ศึกษาสมการไดโอแฟนไทน์ $5^x + 43^y = z^2$ โดยเขาได้แสดงว่าสมการนี้ไม่มีผลเฉลย x, y, z ที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ จากที่กล่าวมาจะเห็นได้ว่าสมการไดโอแฟนไทน์ข้างต้นจะอยู่ในรูปแบบ $q^x + p^y = z^2$ โดยที่ p และ q เป็นจำนวนเฉพาะที่มีค่าแตกต่างกันไป

ในปี ค.ศ. 2018 Fergy และ Rabago [5] ได้หาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ในรูปแบบอื่นที่ต่างจากเดิม คือ สมการ $4^x - p^y = 3z^2$ เมื่อ $p \equiv 3 \pmod{4}$ เป็นจำนวนเฉพาะ พวกเขาพบว่าสมการนี้มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียง 2 ผลเฉลยเท่านั้น คือ $(x, y, z) = (0, 0, 0), (1, 0, 1)$ ต่อมาปี ค.ศ. 2019 Thongnak, Chuayjang และ Kaewong [6] ได้ศึกษาสมการไดโอแฟนไทน์ $2^x - 3^y = z^2$ พวกเขาพบว่าสมการนี้มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียง 3 ผลเฉลยเท่านั้น คือ $(x, y, z) = (0, 0, 0), (1, 0, 1)$ และ $(2, 1, 1)$ ในปี ค.ศ. 2021 Thongnak, Chuanyjan และ Kaewong [7] ได้พิสูจน์ว่า สมการไดโอแฟนไทน์ $7^x - 5^y = z^2$ มีผลเฉลย (x, y, z) ที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียงผลเฉลยเดียว คือ $(0, 0, 0)$ และในปี ค.ศ. 2023 Tadee [8] ได้แสดงการหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $3^x - 2^y = z^2$ และ $3^x - p^y = z^2$ โดยที่ p เป็นจำนวนเฉพาะที่มีสอดคล้องเงื่อนไขบางประการ ได้แก่ กรณี $p \equiv 1 \pmod{3}$, กรณี $p \equiv 2 \pmod{3}$ และ y เป็นจำนวนเต็มคู่, กรณี $p \equiv 29 \pmod{60}$, กรณี $p \equiv 5 \pmod{12}$ และมีจำนวนเฉพาะ $q \neq 2, 3$ ที่ทำให้ $p \equiv -1 \pmod{q}$, กรณี $p \equiv 11 \pmod{12}$ และ x เป็นจำนวนเต็มคู่ ซึ่งสังเกตได้ว่า สมการไดโอแฟนไทน์ที่ศึกษามาแล้วนั้นอยู่ในรูป $q^x - p^y = z^2$ โดยที่ p และ q เป็นจำนวนเฉพาะ

สำหรับงานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาสมการไดโอแฟนไทน์ $12^x - p^y = z^2$ เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะ x, y และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบที่ $x + y \leq 4$ ซึ่งเป็นสมการไดโอแฟนไทน์ที่ยังไม่เคยมีการศึกษามา

ก่อน ในการพิจารณาหาผลเฉลยทั้งหมดของสมการนี้อาศัยความรู้พื้นฐานของทฤษฎีจำนวนและบทตั้งซึ่งจะได้พิสูจน์ไว้ในหัวข้อถัดไปมาช่วยในการพิจารณาไปด้วย นอกจากนี้ในการศึกษาครั้งนี้ยังเป็นการขยายรูปแบบสมการไดโอแฟนไทน์ $q^x - p^y = z^2$ โดยที่ p เป็นจำนวนเฉพาะ และ q ไม่จำเป็นต้องเป็นจำนวนเฉพาะเท่านั้นอีกด้วย

2. ความรู้พื้นฐาน

การศึกษาและบทพิสูจน์ในบทความวิจัยนี้อาศัยความรู้พื้นฐานของทฤษฎีจำนวน ทฤษฎีบทของมิไฮเลสคู (Mihailescu's Theorem) และสมบัติบางประการซึ่งได้กล่าวไว้ในทฤษฎีบทรวมถึงบทตั้งดังต่อไปนี้

บทนิยาม 2.1. [9] ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก จะกล่าวว่าจำนวนเต็ม a สมภาค (congruent) กับ b มอดุโล n แทนด้วย $a \equiv b \pmod{n}$ ถ้า n หาร $a - b$ ลงตัว นั่นคือ $a - b = kn$ สำหรับบางจำนวนเต็ม k

ทฤษฎีบท 2.2. [9] ให้ a, b, c, d, n เป็นจำนวนเต็ม และ $n > 0$ จะได้ว่า

- (1) $a \equiv a \pmod{n}$
- (2) ถ้า $a \equiv b \pmod{n}$ แล้ว $b \equiv a \pmod{n}$
- (3) ถ้า $a \equiv b \pmod{n}$ และ $b \equiv c \pmod{n}$ แล้ว $a \equiv c \pmod{n}$
- (4) ถ้า $a \equiv b \pmod{n}$ และ $c \equiv d \pmod{n}$ แล้ว $a + c \equiv b + d \pmod{n}$ และ $ac \equiv bd \pmod{n}$
- (5) ถ้า $a \equiv b \pmod{n}$ แล้ว $a + c \equiv b + c \pmod{n}$ และ $ac \equiv bc \pmod{n}$
- (6) ถ้า $a \equiv b \pmod{n}$ แล้ว $a^k \equiv b^k \pmod{n}$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก k

สังเกตเห็นได้ว่าจากทฤษฎีบท 2.2. ข้อ (6) จะเห็นได้ว่า ถ้า $k = 0$ แล้ว $a^k = 1 = b^k$ ทำให้ได้ $1 \equiv 1 \pmod{n}$ ดังนั้นข้อ (6) เป็นจริงสำหรับทุก ๆ k ที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

ทฤษฎีบท 2.3. ทฤษฎีบทของมิไฮเลสคู (Mihailescu's Theorem) [10] สมการ $a^x - b^y = 1$ เมื่อ a, b, x, y เป็นจำนวนเต็มที่ $\min(a, b, x, y) > 1$ มีผลเฉลยเพียงผลเฉลยเดียว คือ $(a, b, x, y) = (3, 2, 2, 3)$

นอกจากบทนิยามและทฤษฎีบทข้างต้นนี้แล้ว เรายังอาศัยบทตั้งต่อไปนี้ช่วยในการพิจารณาหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $12^x - p^y = z^2$ อีกด้วย สำหรับการพิสูจน์บทตั้งได้แสดงไว้ ดังนี้

บทตั้ง 2.4. ถ้า a เป็นจำนวนเต็ม แล้ว $a^2 \equiv 0, 1 \pmod{3}$

พิสูจน์ ให้ a เป็นจำนวนเต็ม จะได้ว่า $a = 3q + r$ สำหรับบางจำนวนเต็ม q และ r โดยที่ $0 \leq r < 3$ นั่นคือ $a - r = 3q$ หรือ $a \equiv r \pmod{3}$

ถ้า $r = 0$ แล้ว $a \equiv 0 \pmod{3}$ โดยทฤษฎีบท 2.2. ข้อ (6) ทำให้ได้ว่า $a^2 \equiv 0 \pmod{3}$

ถ้า $r = 1$ แล้ว $a \equiv 1 \pmod{3}$ โดยทฤษฎีบท 2.2. ข้อ (6) ทำให้ได้ว่า $a^2 \equiv 1 \pmod{3}$

ถ้า $r = 2$ แล้ว $a \equiv 2 \pmod{3}$ โดยทฤษฎีบท 2.2. ข้อ (6) ทำให้ได้ว่า $a^2 \equiv 4 \equiv 1 \pmod{3}$

ดังนั้น $a^2 \equiv 0, 1 \pmod{3}$

3. ผลการวิจัย

พิจารณาสมการไดโอแฟนไทน์

$$12^x - p^y = z^2 \quad (1)$$

เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะและ x, y, z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

ในการศึกษาเราได้แบ่งการพิจารณาผลเฉลยของสมการ (1) ออกเป็น 3 กรณี ได้แก่ กรณี $x = 0$ กรณี $y = 0$ และกรณี $0 < x + y \leq 4$ สำหรับกรณีแรก เมื่อแทน $x = 0$ ลงในสมการ (1) ได้สมการไดโอแฟนไทน์ $1 - p^y = z^2$ จากการศึกษาพบว่าสมการนี้มีผลเฉลยเป็น $(p, y, z) = (p, 0, 0)$ ซึ่งได้พิสูจน์ไว้ในทฤษฎีบท 3.1. ถ้าแทน $y = 0$ ลงในสมการ (1) จากการศึกษาพบว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $12^x - 1 = z^2$ มีผลเฉลย คือ $(x, z) = (0, 0)$ โดยได้แสดงไว้ในทฤษฎีบท 3.2. สำหรับกรณีสุดท้ายทำการหาผลเฉลยของสมการ (1) ภายใต้ง่อนไข $0 < x + y \leq 4$ โดยแบ่งกรณีย่อยอีก 3 กรณี คือ $x = 1, x = 2$ และ $x = 3$ ซึ่งได้แสดงไว้ในทฤษฎีบท 3.3.

ทฤษฎีบท 3.1. สมการไดโอแฟนไทน์

$$1 - p^y = z^2 \quad (2)$$

เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะ และ y, z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ มีผลเฉลย คือ $(p, y, z) = (p, 0, 0)$

พิสูจน์ ให้ y และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ เนื่องจาก p เป็นจำนวนเฉพาะ จึงทำให้ $1 - p^y \leq 0$ แต่ $z^2 \geq 0$ จึงได้ว่า $1 - p^y = 0$ ซึ่งทำให้ได้ $y = 0$ และ $z = 0$ ดังนั้นผลเฉลยของสมการ (2) คือ $(p, y, z) = (p, 0, 0)$ เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะ

ต่อไปพิจารณา $y = 0$ เมื่อแทนลงในสมการ (1) จะได้สมการไดโอแฟนไทน์ $12^x - 1 = z^2$ ผลการศึกษาพบว่า สมการนี้มีผลเฉลยเพียงผลเฉลยเดียวซึ่งได้พิสูจน์ไว้ในทฤษฎีบทถัดไป

ทฤษฎีบท 3.2. สมการไดโอแฟนไทน์

$$12^x - 1 = z^2 \quad (3)$$

เมื่อ x, z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ มีผลเฉลยเพียงผลเฉลยเดียวคือ $(x, z) = (0, 0)$

พิสูจน์ ให้ x และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ถ้า $x \geq 1$ เนื่องจาก $12 \equiv 0 \pmod{3}$ ทำให้ $12^x \equiv 0 \pmod{3}$ ด้วย และได้ว่า $12^x - 1 \equiv -1 \equiv 2 \pmod{3}$ จึงได้ $z^2 \equiv 2 \pmod{3}$ ซึ่งเกิดข้อขัดแย้งกับบทตั้ง 2.4. ดังนั้น $x = 0$ เมื่อแทนลงในสมการ (3) ทำให้ได้ $z = 0$ ดังนั้นผลเฉลยของสมการ (3) คือ $(x, z) = (0, 0)$

สำหรับทฤษฎีบท 3.3. ได้จากการพิจารณาสมการไดโอแฟนไทน์ $12^x - p^y = z^2$ เมื่อ x, y, z เป็นจำนวนเต็มบวกภายใต้ง่อนไข $x + y \leq 4$ ผลจากการศึกษาพบว่า สมการนี้มีผลเฉลยทั้งหมด 13 ผลเฉลยด้วยกัน โดยได้แสดงวิธีการหาผลเฉลยไว้ในทฤษฎีบทต่อไป

ทฤษฎีบท 3.3. สมการไดโอแฟนไทน์ (1) โดยที่ x, y, z เป็นจำนวนเต็มบวกที่ $x + y \leq 4$ มีผลเฉลย คือ

$$(p, x, y, z) = (3, 1, 1, 3), (11, 1, 1, 1), (2, 1, 3, 2), (23, 2, 1, 11), (1607, 3, 1, 11), (1559, 3, 1, 13), (1439, 3, 1, 17), \\ (1367, 3, 1, 19), (1103, 3, 1, 25), (887, 3, 1, 29), (503, 3, 1, 35), (359, 3, 1, 37), (47, 3, 1, 41)$$

พิสูจน์ ให้ x, y และ z เป็นจำนวนเต็มบวก เนื่องจาก $x + y \leq 4$ จึงสามารถแบ่งการพิจารณาออกเป็น 3 กรณีใหญ่ ๆ ได้แก่ $x = 1, x = 2$ และ $x = 3$

กรณี 1 $x = 1$ แทนลงในสมการ (1) จะได้

$$12 - p^y = z^2 \quad (4)$$

เนื่องจาก $z^2 \geq 0$ ทำให้ $12 - p^y \geq 0$ หรือ $p^y \leq 12$ แบ่งพิจารณาเป็น 3 กรณีย่อย ได้แก่ $y = 1, y = 2$ และ $y = 3$

กรณี 1.1. $y = 1$ จาก $p \leq 12$ ได้ว่าจำนวนเฉพาะ p ที่เป็นไปได้ คือ 2, 3, 5, 7 และ 11 แต่กรณี $p = 2, 5, 7$ ทำให้ z ไม่เป็นจำนวนเต็ม สำหรับ $p = 3$ เมื่อแทนลงในสมการ (4) จะได้ $z = 3$ และถ้า $p = 11$ เมื่อแทนลงในสมการ (4) ทำให้ได้ $z = 1$ ดังนั้นผลเฉลยของกรณีนี้ คือ $(p, x, y, z) = (3, 1, 1, 3), (11, 1, 1, 1)$

กรณี 1.2. $y = 2$ จาก $p^2 \leq 12$ ได้ว่าจำนวนเฉพาะ p ที่เป็นไปได้ คือ 2 และ 3 เมื่อแทนลงในสมการ (4) ทำให้ได้ $z^2 = 8$ และ 3 ตามลำดับ ซึ่งทำให้ z ไม่เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้นกรณีนี้จึงไม่มีผลเฉลย

กรณี 1.3. $y = 3$ จาก $p^3 \leq 12$ ได้ว่าจำนวนเฉพาะ p ที่เป็นไปได้มีเพียงจำนวนเดียว คือ $p = 2$ เมื่อแทนลงในสมการ (4) ทำให้ได้ $z = 2$ ดังนั้นผลเฉลยในกรณีนี้ คือ $(p, x, y, z) = (2, 1, 3, 2)$

ดังนั้นสำหรับกรณี $x = 1$ สรุปได้ว่าสมการ (1) มีผลเฉลยเป็น $(p, x, y, z) = (3, 1, 1, 3), (11, 1, 1, 1), (2, 1, 3, 2)$

กรณี 2 $x = 2$ เมื่อแทนลงในสมการ (1) จะได้ $12^2 - p^y = z^2$ ทำให้ $p^y = 12^2 - z^2 = (12 - z)(12 + z)$ จึงได้ว่ามีจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ $0 \leq u < v \leq y$ ที่ทำให้ $12 - z = p^u$ และ $12 + z = p^v$ โดยที่ $y = u + v$ และเนื่องจาก $3 \leq 2 + y \leq 4$ จึงสามารถแบ่งการพิจารณาได้อีก 2 กรณีย่อย ดังนี้

กรณี 2.1. $y = 1$ ทำให้ $u = 0$ จะได้ $z = 11$ และ $p = 23$

กรณี 2.2. $y = 2$ ทำให้ $u = 0$ เช่นกัน จึงได้ $v = 2$ และยังได้ว่า $p^2 + 1 = (12 + z) + (12 - z) = 24$ ทำให้ $p^2 = 23$ ซึ่งเกิดข้อขัดแย้ง

ดังนั้นในกรณีนี้สมการ (1) มีผลเฉลย คือ $(p, x, y, z) = (23, 2, 1, 11)$

กรณี 3 $x = 3$ เนื่องจาก $x + y \leq 4$ ทำให้ได้ $y = 1$ เมื่อแทนลงในสมการ (1) จะได้ว่า $p = 12^3 - z^2$ ดังนั้น $z^2 \leq 1726$ นั่นคือ $1 \leq z \leq 41$ ซึ่งพบว่า (p, z) ที่สอดคล้องกับสมการ (1) ได้แก่ $(1607, 11), (1559, 13), (1439, 17), (1367, 19), (1103, 25), (887, 29), (503, 35), (359, 37)$ และ $(47, 41)$ ดังนั้นผลเฉลย (p, x, y, z) ทั้งหมดของสมการ (1) สำหรับกรณีนี้ได้แก่ $(1607, 3, 1, 11), (1559, 3, 1, 13), (1439, 3, 1, 17), (1367, 3, 1, 19), (1103, 3, 1, 25), (887, 3, 1, 29), (503, 3, 1, 35), (359, 3, 1, 37)$ และ $(47, 3, 1, 41)$

ผลที่ได้จากทฤษฎีบท 3.1.-3.3. ทำให้เราสามารถหาผลเฉลย (p, x, y, z) ที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ทั้งหมดของสมการไดโอแฟนไทน์ (1) เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะ และ $x + y \leq 4$ ได้ซึ่งแสดงไว้ในทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.4. สมการไดโอแฟนไทน์ $12^x - p^y = z^2$ เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะ และ x, y, z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบที่ $x + y \leq 4$ มีผลเฉลย (p, x, y, z) คือ $(p, 0, 0, 0), (3, 1, 1, 3), (11, 1, 1, 1), (2, 1, 3, 2), (23, 2, 1, 11), (1607, 3, 1, 11), (1559, 3, 1, 13), (1439, 3, 1, 17), (1367, 3, 1, 19), (1103, 3, 1, 25), (887, 3, 1, 29), (503, 3, 1, 35), (359, 3, 1, 37), (47, 3, 1, 41)$

พิสูจน์ ให้ x, y, z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบที่ $x + y \leq 4$ เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะ แบ่งพิจารณาเป็น 3 กรณี ดังนี้

กรณี 1 $x = 0$ อาศัยทฤษฎีบท 3.1. ได้ว่า สมการนี้มีผลเฉลย คือ $(p, x, y, z) = (p, 0, 0, 0)$ เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะ

กรณี 2 $y = 0$ อาศัยทฤษฎีบท 3.2. ได้ว่า สมการนี้มีผลเฉลย คือ $(p, x, y, z) = (p, 0, 0, 0)$ เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะ เช่นกัน

กรณี 3 $x, y > 0$ และ $x + y \leq 4$ โดยทฤษฎีบท 3.3. ได้ว่าสมการนี้มีผลเฉลย (p, x, y, z) ทั้งหมด 13 ผลเฉลย คือ $(3, 1, 1, 3), (11, 1, 1, 1), (2, 1, 3, 2), (23, 2, 1, 11), (1607, 3, 1, 11), (1559, 3, 1, 13), (1439, 3, 1, 17), (1367, 3, 1, 19), (1103, 3, 1, 25), (887, 3, 1, 29), (503, 3, 1, 35), (359, 3, 1, 37)$ และ $(47, 3, 1, 41)$

นอกจากนี้เรายังพบว่า สำหรับกรณี $x = 1$ ทำให้ $p^y > 12$ สำหรับทุก ๆ $y \geq 4$ จึงได้ว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $12^x - p^y = z^2$ ไม่มีผลเฉลย ซึ่งแสดงไว้ในบทแทรก 3.5.

บทแทรก 3.5. สมการไดโอแฟนไทน์ $12 - p^y = z^2$ เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะ ไม่มีผลเฉลย y, z ที่เป็นจำนวนเต็มบวก ถ้า $y \geq 4$

พิสูจน์ เนื่องจาก $y \geq 4$ ทำให้ $p^y > 12$ จึงได้ $12 - p^y < 0$ ซึ่งเกิดข้อขัดแย้ง ดังนั้นสมการนี้จึงไม่มีผลเฉลย

บทแทรก 3.6. สมการไดโอแฟนไทน์ $12 - p^y = z^2$ เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะ และ y, z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ มีผลเฉลย (p, y, z) คือ $(3, 1, 3), (11, 1, 1)$ และ $(2, 3, 2)$

พิสูจน์ ถ้า $y = 0$ แล้วจะได้ $z^2 = 11$ ทำให้ z ไม่เป็นจำนวนเต็ม สำหรับ $0 < y < 4$ โดยทฤษฎีบท 3.3. ได้ว่าสมการ $12 - p^y = z^2$ มีผลเฉลย (p, y, z) เป็น $(3, 1, 3), (11, 1, 1)$ และ $(2, 3, 2)$ และถ้า $y \geq 4$ โดยบทแทรก 3.5. ได้ว่าสมการนี้ไม่มีผลเฉลย ดังนั้นผลเฉลยทั้งหมดของสมการ $12 - p^y = z^2$ คือ $(p, y, z) = (3, 1, 3), (11, 1, 1), (2, 3, 2)$

สำหรับกรณี $x = 2$ และ $y > 2$ พบว่า $(p, y, z) = (2, 7, 4)$ เป็นอีกหนึ่งผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $12^2 - p^y = z^2$ ด้วยดังได้แสดงไว้ในบทแทรก 3.7.

บทแทรก 3.7. สมการไดโอแฟนไทน์ $12^2 - p^y = z^2$ เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะ มีผลเฉลย (p, y, z) ที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียงสองผลเฉลย คือ $(2, 7, 4)$ และ $(23, 1, 11)$

พิสูจน์ ถ้า $y = 0$ แล้วจะได้ $z^2 = 143$ ซึ่งทำให้ z ไม่เป็นจำนวนเต็ม จึงเกิดข้อขัดแย้ง ดังนั้น $y > 0$ จากสมการ $12^2 - p^y = z^2$ ได้ว่า $p^y = 12^2 - z^2 = (12 - z)(12 + z)$ จึงได้ว่า $12 - z = p^u$ และ $12 + z = p^v$ สำหรับบางจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ $u < v \leq y$ โดยที่ $y = u + v$ แบ่งพิจารณาเป็น 2 กรณี

กรณี 1 $u = 0$ จากทฤษฎีบท 3.3. ได้ว่า $(p, y, z) = (23, 1, 11)$ เป็นผลเฉลยของสมการ $12^2 - p^y = z^2$

กรณี 2 $u \geq 1$ เนื่องจาก $12 - z = p^u$ และ $12 + z = p^v$ ทำให้ได้ $24 = (12 - z) + (12 + z) = p^u + p^v = p^u(1 + p^{v-u})$ นั่นคือ $2^3 \cdot 3 = p^u(1 + p^{v-u})$ พบว่าจำนวนเฉพาะ p ที่เป็นไปได้คือ 2 และ 3 ถ้า $p = 3$ ทำให้ได้ $u = 1$ และ $1 + p^{v-u} = 8$ ซึ่งจะได้ $3^{v-1} = 7$ เกิดข้อขัดแย้ง ดังนั้น $p = 2$ จะทำให้ $u = 3$ และ $1 + 2^{v-3} = 3$ ซึ่งจะได้ $v = 4$ และได้ว่า $y = 7, z = 4$ ดังนั้นสำหรับกรณี $u \geq 1$ สมการนี้มีผลเฉลยเป็น $(p, y, z) = (2, 7, 4)$

จากทั้ง 2 กรณีจึงสรุปได้ว่า สมการ $12^2 - p^y = z^2$ มีผลเฉลย (p, y, z) ทั้งหมด คือ $(2, 7, 4)$ และ $(23, 1, 11)$

และท้ายนี้เราได้พิจารณาเพิ่มเติมในกรณี x เป็นจำนวนเต็มคู่ พบว่า $(p, x, y, z) = (2, 4, 13, 112)$ เป็นอีกหนึ่งผลเฉลยของสมการ (1) ด้วย เมื่ออาศัยผลจากทฤษฎีบท 3.1-3.3. รวมถึงบทตั้ง 3.7. จะได้ว่า สมการ (1) มีผลเฉลย (p, x, y, z) ที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ คือ $(p, 0, 0, 0), (23, 2, 1, 11)$ และ $(2, 4, 13, 112)$ เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะ โดยได้แสดงไว้ในทฤษฎีบท 3.8.

ทฤษฎีบท 3.8. ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะ และ x, y, z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ถ้า x เป็นจำนวนเต็มคู่ แล้วสมการไดโอแฟนไทน์ (1) มีผลเฉลยเป็น $(p, x, y, z) = (p, 0, 0, 0), (23, 2, 1, 11), (2, 4, 13, 112)$

พิสูจน์ เนื่องจาก x เป็นจำนวนเต็มคู่ จึงได้ $x = 2m$ สำหรับบางจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ m จากสมการ (1) จะได้ $12^{2m} - p^y = z^2$ แบ่งการพิจารณาออกเป็น 3 กรณี

กรณี 1 $m = 0$ จะได้ $z^2 + p^y = 1$ ถ้า $y = 0$ แล้ว $z = 0$ จึงได้ว่าผลเฉลย (p, x, y, z) ของสมการ (1) คือ $(p, 0, 0, 0)$ เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะ ซึ่งยังคงเป็นไปตามทฤษฎีบท 3.1 และ 3.2. ส่วนถ้า $y \geq 1$ ทำให้ $p^y > 1$ ดังนั้น $z^2 + p^y > 1$ จึงเกิดข้อขัดแย้ง

กรณี 2 $m = 1$ จากบทแทรก 3.7. จะได้สมการ (1) มีผลเฉลย (p, x, y, z) เป็น $(2, 2, 7, 4)$ และ $(23, 2, 1, 11)$

กรณี 3 $m > 1$ จาก $12^{2m} - p^y = z^2$ ทำให้ $p^y = 12^{2m} - z^2 = (12^m - z)(12^m + z)$ จึงได้ว่า มีจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ u ที่ทำให้ $p^u = 12^m - z$ และ $p^{y-u} = 12^m + z$ โดยที่ $y > 2u$ ดังนั้น

$$p^u(1 + p^{y-2u}) = (12^m - z) + (12^m + z) = 2^{2m+1} \cdot 3^m$$

แบ่งพิจารณาออกเป็น 2 กรณีย่อย ดังนี้

กรณี 3.1. $p^u = 2^{2m+1}$ และ $1 + p^{y-2u} = 3^m$ จึงได้ $p = 2, u = 2m + 1$ เนื่องจาก $y > 2u$ ทำให้ $y - 2u \geq 1$ ถ้า $y - 2u = 1$ แล้ว $3 = 1 + 2^1 = 3^m$ ทำให้ $m = 1$ เกิดข้อขัดแย้ง ดังนั้น $y - 2u > 1$ จึงได้ $\max\{m, y - 2u\} > 1$ และจากสมการ $3^m - 2^{y-2u} = 1$ โดยทฤษฎีบท 2.3. ได้ว่า $m = 2$ และ $y - 2u = 3$ ทำให้ได้ $x = 4, y = 13, z = 112$ ดังนั้นผลเฉลยในกรณีนี้ คือ $(p, x, y, z) = (2, 4, 13, 112)$

กรณี 3.2. $p^u = 3^m$ และ $1 + p^{y-2u} = 2^{2m+1}$ จึงได้ว่า $p = 3$ และ $u = m$ ถ้า $y - 2u = 1$ แล้ว $4 = 1 + 3^1 = 2^{2m+1}$ จะได้ $2m + 1 = 2$ ทำให้ m ไม่เป็นจำนวนเต็ม ซึ่งเกิดข้อขัดแย้ง สำหรับกรณีนี้จึงไม่มีผลเฉลยจากทั้ง 3 กรณี จึงสรุปว่า ถ้า x เป็นจำนวนเต็มคู่ แล้วสมการ (1) มีผลเฉลย (p, x, y, z) ที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ คือ $(p, 0, 0, 0), (23, 2, 1, 11)$ และ $(2, 4, 13, 112)$

4. สรุปและอภิปรายผล

ในบทความวิจัยนี้ได้ศึกษาสมการไดโอแฟนไทน์ $12^x - p^y = z^2$ เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะ และ x, y, z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ซึ่งเป็นการขยายรูปแบบการศึกษาสมการไดโอแฟนไทน์ $q^x - p^y = z^2$ ที่แต่เดิมมักพิจารณาในกรณีที่ q เป็นจำนวนเฉพาะ โดยในที่นี้เราให้ $q = 12$ ซึ่งไม่จำเป็นต้องเป็นจำนวนเฉพาะเท่านั้น ผลจากการศึกษาครั้งนี้พบว่า กรณี $x = 0$ หรือ $y = 0$ สมการนี้มีผลเฉลย (p, x, y, z) เป็น $(p, 0, 0, 0)$ เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะ สำหรับกรณี x, y, z เป็นจำนวนเต็มบวกและ $x + y \leq 4$ พบว่าสมการนี้มีผลเฉลยทั้งหมด 13 ผลเฉลยด้วยกัน ดังตารางที่ 1

ตารางที่ 1 ผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $12^x - p^y = z^2$ เมื่อ $0 < x + y \leq 4$

p	x	y	z
3	1	1	3
11	1	1	1
2	1	3	2
23	2	1	11
1607	3	1	11
1559	3	1	13
1439	3	1	17
1367	3	1	19
1103	3	1	25
887	3	1	29
503	3	1	35
359	3	1	37
47	3	1	41

กรณี $x = 1$ สมการนี้มีผลเฉลย (p, x, y, z) ที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียง 3 ผลเฉลยเท่านั้น คือ $(3, 1, 1, 3), (11, 1, 1, 1)$ และ $(2, 1, 3, 2)$ และในทฤษฎีบทสุดท้ายเราได้ขยายขอบเขตของ x โดยพิจารณากรณี x เป็นจำนวนเต็มคู่ ผลจากการศึกษาพบว่า สมการนี้มีผลเฉลย (p, x, y, z) เป็น $(p, 0, 0, 0), (23, 2, 1, 11)$ และ $(2, 4, 13, 112)$

เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะ ซึ่งเห็นได้ว่ามีผลเฉลยเพิ่มขึ้นจากในทฤษฎีบท 3.1., 3.2. และบทตั้ง 3.7. อย่างไรก็ตาม การวิจัยนี้ยังมีข้อจำกัดในการพิจารณาผลเฉลยอยู่ เนื่องจากพิจารณาเฉพาะกรณีที่ x และ y เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบภายใต้เงื่อนไข $x + y \leq 4$ และกรณี x เป็นจำนวนเต็มคู่เท่านั้น สำหรับกรณีอื่น เช่น $x > 4$ เป็นจำนวนเต็มคี่ สมการนี้จะมีผลเฉลยหรือไม่ และมีผลเฉลยเป็นอย่างไร ซึ่งเป็นหัวข้องานวิจัยที่น่าสนใจศึกษาต่อไปในอนาคต

5. เอกสารอ้างอิง

- [1] Sroysang, B. (2012). On the Diophantine equation $3^x + 5^y = z^2$. International Journal of Pure and Applied Mathematics, 81(4), p.p.605-608.
- [2] Sroysang, B. (2013). On the Diophantine equation $5^x + 7^y = z^2$. International Journal of Pure and Applied Mathematics, 89(1), p.p.115-118.
- [3] Sroysang, B. (2014). On the Diophantine equation $3^x + 45^y = z^2$. International Journal of Pure and Applied Mathematics, 91(2), p.p.269-272.
- [4] Sroysang, B. (2014). On the Diophantine equation $5^x + 43^y = z^2$. International Journal of Pure and Applied Mathematics, 91(1), p.p.537-540.
- [5] Fergy, J. and Rabago, T. (2018). On the Diophantine Equation $4^x - p^y = 3z^2$ where p is a Prime. Thai Journal of Mathematics, 16(3), p.p.642-650.
- [6] Thongnak, S., Chuayjan, W. and Kaewong, T. (2019). On the Exponential Diophantine Equation $2^x - 3^y = z^2$. Southeast Asian Journal of Science, 7(1), p.p.1-4.
- [7] Thongnak, S., Chuayjan, W. and Kaewong, T. (2021). The solution of the exponential Diophantine equation $7^x - 5^y = z^2$. Mathematical Journal by The Mathematical Association of Thailand Under the Patronage of His Majesty the King. 66(703), p.p.62-67.
- [8] Tadee, S. (2023). On the Diophantine equation $3^x - p^y = z^2$ where p is prime. Journal of Science and Technology Thonburi University, 7(1), 1-6.
- [9] Devid M. Burton. (2010). Elementary Number Theory. 7th edition, New York: McGraw-Hill.
- [10] Mihailescu, P. (2004). Primary cyclotomic units and a proof of Catalan's Conjecture. Journal fur die reine angewandte Mathematik., 572, p.p.167-195.