

$$\text{สมการไดโอแฟนไทน์ } 3^x + p^y \cdot q^z = u^2$$

$$\text{ON THE DIOPHANTINE EQUATION } 3^x + p^y \cdot q^z = u^2$$

ณัฐวัฒน์ สามาอาภัตร์¹ สุธน ตาดี^{1*}

Nattawat Samaapat¹, Suton Tadee^{1*}

¹สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเทพสตรี

¹Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Thepsatri Rajabhat University

* Corresponding author e-mail: suton.t@lawasri.tru.ac.th

วันที่รับบทความ 4 ตุลาคม 2568 วันที่แก้ไขบทความ 31 มีนาคม 2569 วันที่ตอบรับบทความ 11 เมษายน 2569

บทคัดย่อ

ในงานวิจัยนี้ได้ศึกษาและหาผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบทั้งหมดของสมการไดโอแฟนไทน์ $3^x + p^y \cdot q^z = u^2$ เมื่อ x, y, z และ u เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ และ p, q เป็นจำนวนเฉพาะ โดยที่ $p \equiv 5 \pmod{12}$ และ $q \equiv 5 \pmod{12}$ โดยใช้การพิสูจน์ตามหลักการทางคณิตศาสตร์ประกอบกับความรู้พื้นฐานทางทฤษฎีจำนวน เช่น จำนวนเฉพาะ สมภาค และสัญลักษณ์เลอจองด์ เป็นต้น ผลการวิจัยพบว่า สมการดังกล่าวมีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียงผลเฉลยเดียว คือ $(x, y, z, u) = (1, 0, 0, 2)$ นอกจากนี้ ผลงานวิจัยดังกล่าวสามารถนำไปใช้ในการหาผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบของสมการไดโอแฟนไทน์ $3^x + p^y \cdot q^z = u^{2t}$ เมื่อ t เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

คำสำคัญ: สมการไดโอแฟนไทน์; จำนวนเฉพาะ; สมภาค; สัญลักษณ์เลอจองด์

ABSTRACT

In this paper, we study and find all non-negative integer solutions of the Diophantine equation $3^x + p^y \cdot q^z = u^2$, where x, y, z and u are non-negative integers and p, q are prime numbers with $p \equiv 5 \pmod{12}$ and $q \equiv 5 \pmod{12}$. By using mathematical proofs combined with basic knowledge of number theory, such as: prime number, congruence and Legendre symbol, the results of the research were found that the Diophantine equation has the unique non-negative integer solution. That is $(x, y, z, u) = (1, 0, 0, 2)$. Moreover, it can be used to find the non-negative integer solutions of the Diophantine equation $3^x + p^y \cdot q^z = u^{2t}$, where t is a non-negative integer.

Keywords: Diophantine equation; Prime number; Congruence; Legendre symbol

1. บทนำ

ในช่วงประมาณหนึ่งทศวรรษที่ผ่านมา มีนักคณิตศาสตร์จำนวนไม่น้อยที่ได้ให้ความสนใจในการศึกษาหาผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบของสมการไดโอแฟนไทน์ (Diophantine equation) ที่อยู่ในรูป $3^x + n^y = z^2$ เมื่อ x, y, z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก โดยจากการที่คณะผู้วิจัยได้ศึกษาค้นคว้าผลงานวิจัยที่ผ่านมา สามารถแบ่งงานวิจัยออกได้เป็น 3 กลุ่ม ดังนี้

กลุ่มที่ 1 พิจารณากรณีที่ n เป็นจำนวนเฉพาะ ตัวอย่างผลงานวิจัย เช่น ในปี ค.ศ. 2013 Sroysang [1] ได้พิสูจน์ว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $3^x + 2^y = z^2$ มีผลเฉลย (x, y, z) สามผลเฉลย คือ $(1, 0, 2), (0, 3, 3)$ และ $(2, 4, 5)$ และในปีเดียวกัน Sroysang [2] ได้แสดงอีกด้วยว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $3^x + 17^y = z^2$ มีผลเฉลย (x, y, z) เพียงผลเฉลยเดียวเท่านั้น คือ $(1, 0, 2)$ นอกจากนี้ Rabago [3] ได้แสดงว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $3^x + 19^y = z^2$ และ $3^x + 91^y = z^2$ มีผลเฉลยสองผลเฉลย ดังต่อไปนี้ $(x, y, z) \in \{(1, 0, 2), (4, 1, 10)\}$ และ $(x, y, z) \in \{(1, 0, 2), (2, 1, 10)\}$ ตามลำดับ และต่อมาในปี ค.ศ. 2017 Asthana and Singh [4] ได้พิสูจน์ว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $3^x + 13^y = z^2$ มีผลเฉลย (x, y, z) สี่ผลเฉลยเท่านั้น คือ $(1, 0, 2), (1, 1, 4), (3, 2, 14)$ และ $(5, 1, 16)$ ในปี ค.ศ. 2018 Rao [5] ได้ค้นพบว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $3^x + 7^y = z^2$ มีผลเฉลย (x, y, z) เพียงสองผลเฉลยเท่านั้น คือ $(1, 0, 2)$ และ $(2, 1, 4)$ หลังจากนั้นในปี ค.ศ. 2020 Asthana and Singh [6] ได้แสดงว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $3^x + 117^y = z^2$ มีผลเฉลย (x, y, z) คือ $(1, 0, 2), (3, 1, 12), (7, 1, 48)$ และ $(7, 2, 126)$ ในปี ค.ศ. 2021 Tangjai and Chubthaisong [7] ได้ศึกษาสมการไดโอแฟนไทน์ $3^x + p^y = z^2$ เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะ โดยที่ $p \equiv 2 \pmod{3}$ และต่อมาในปี ค.ศ. 2024 Paisal et al. [8] ได้พิสูจน์ว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $3^x + 97^y = z^2$ มีสองผลเฉลย คือ $(x, y, z) \in \{(1, 0, 2), (1, 1, 10)\}$ และในปี ค.ศ. 2025 Manikandan and Venkatraman [9] ได้แสดงว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $3^x + 227^y = z^2$ และ $3^x + 229^y = z^2$ มีผลเฉลย คือ $(x, y, z) \in \{(1, 0, 2)\}$ และ $(x, y, z) \in \{(1, 0, 2), (3, 1, 16)\}$ ตามลำดับ

กลุ่มที่ 2 พิจารณากรณีที่ n เป็นจำนวนประกอบ ตัวอย่างผลงานวิจัย เช่น ในปี ค.ศ. 2014 Sroysang [10] [11] ได้พิสูจน์ว่า สมการไดโอแฟนไทน์ $3^x + 45^y = z^2$ และ $3^x + 85^y = z^2$ มีผลเฉลยเพียงผลเฉลยเดียว คือ $(x, y, z) = (1, 0, 2)$ และต่อมาในปี ค.ศ. 2020 Sangam [12] ได้พิสูจน์ว่า สมการไดโอแฟนไทน์ $3^x + 6^y = z^2$ มีผลเฉลยจำนวนเต็มบวก (x, y, z) เพียงสามผลเฉลย คือ $(1, 1, 3), (2, 3, 15)$ และ $(6, 4, 45)$ ในปี ค.ศ. 2022 Biswas [13] ได้พิสูจน์ว่า สมการไดโอแฟนไทน์ $3^x + 35^y = z^2$ มีผลเฉลย (x, y, z) เพียงสองผลเฉลยเท่านั้น คือ $(1, 0, 2)$ และ $(0, 1, 6)$ ในปี ค.ศ. 2023 Srimud and Tadee [14] ได้ศึกษาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $3^x + b^y = z^2$ เมื่อ b เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่ $b \equiv 5 \pmod{20}$ หรือ $b \equiv 5 \pmod{30}$ ในปี ค.ศ. 2024 Malavika and Venkatraman [15] ได้พิสูจน์ว่า สมการไดโอแฟนไทน์ $3^x + 121^y = z^2$ มีผลเฉลย (x, y, z) เพียงสองผลเฉลยเท่านั้น คือ $(1, 0, 2)$ และ $(5, 2, 122)$ และ Biswas [16] ได้แสดงว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $3^x + 63^y = z^2$ มีผลเฉลย (x, y, z) สองผลเฉลย คือ $(1, 0, 2)$ และ $(0, 1, 8)$ เมื่อไม่นานมานี้ ในปี ค.ศ. 2025 Biswas [17] ได้ศึกษาและพิสูจน์ว่า สมการไดโอแฟนไทน์ $3^x + 15^y = z^2$ มีผลเฉลย (x, y, z) สองผลเฉลยเท่านั้น คือ $(1, 0, 2)$ และ $(0, 1, 4)$ นอกจากนี้ Rao [18] ได้ศึกษาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $(3^k - 1)^x + (3^k)^y = z^2$ เมื่อ k, x, y และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

กลุ่มที่ 3 พิจารณากรณีที่ n^y อยู่ในรูป $p^y \cdot q^z$ เมื่อ p และ q เป็นจำนวนเฉพาะที่ได้กำหนดมาให้ ตัวอย่างผลงานวิจัย เช่น ในปี ค.ศ. 2015 Ai-juan and Mou-Jie [19] ได้ศึกษาและค้นพบว่า สมการไดโอแฟนไทน์ $3^x + 5^y \cdot 19^z = u^2$ มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ (x, y, z, u) สามผลเฉลย คือ $(1, 0, 0, 2), (4, 0, 1, 10)$ และ $(2, 2, 1, 22)$ ต่อมาในปี ค.ศ. 2019 Vesarachasart et al. [20] ได้พิสูจน์ว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $3^x + 5^y \cdot 7^z = u^2$ มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ (x, y, z, u) เพียงสี่ผลเฉลยเท่านั้น คือ $(1, 0, 0, 2), (2, 0, 1, 4), (4, 2, 1, 16)$ และ $(14, 4, 1, 2188)$

จากการศึกษางานวิจัยดังกล่าวข้างต้น โดยเฉพาะงานวิจัยในกลุ่มที่ 3 ทำให้คณะผู้วิจัยสนใจที่จะศึกษาค้นคว้าหาผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบของสมการไดโอแฟนไทน์ $3^x + p^y \cdot q^z = u^2$ เมื่อ x, y, z และ u เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ และ p, q เป็นจำนวนเฉพาะ โดยที่ $p \equiv 5 \pmod{12}$ และ $q \equiv 5 \pmod{12}$ ซึ่งในงานวิจัยนี้จะใช้การพิสูจน์ตามหลักการทางคณิตศาสตร์ประกอบกับความรู้พื้นฐานทางทฤษฎีจำนวน เช่น จำนวนเฉพาะ (prime number) สมภาค (congruence) และ สัญลักษณ์เลอจองด์ (Legendre symbol) เป็นต้น

2. ความรู้พื้นฐาน

ในหัวข้อนี้จะทบทวนความรู้เกี่ยวกับความหมายและสมบัติเบื้องต้นของสมภาคและสัญลักษณ์เลอจองด์ตามลำดับดังนี้

บทนิยาม 2.1 [21] ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก จะกล่าวว่า สองจำนวนเต็ม a และ b สมภาค หรือ คอนกรูเอนซ์ มอดุโล (congruent modulo) n เขียนแทนด้วย $a \equiv b \pmod{n}$ ถ้า n หาร $a - b$ ลงตัว หรือ $a - b = nk$ สำหรับบางจำนวนเต็ม k

ทฤษฎีบท 2.2 [21] ให้ $n > 1$ เป็นจำนวนเต็มบวก และ a, b, c, d เป็นจำนวนเต็มใด ๆ จะได้ว่าข้อความต่อไปนี้ เป็นจริง

1. $a \equiv a \pmod{n}$
2. ถ้า $a \equiv b \pmod{n}$ แล้ว $b \equiv a \pmod{n}$
3. ถ้า $a \equiv b \pmod{n}$ และ $b \equiv c \pmod{n}$ แล้ว $a \equiv c \pmod{n}$
4. ถ้า $a \equiv b \pmod{n}$ และ $c \equiv d \pmod{n}$ แล้ว $a + c \equiv b + d \pmod{n}$ และ $ac \equiv bd \pmod{n}$
5. ถ้า $a \equiv b \pmod{n}$ แล้ว $a + c \equiv b + c \pmod{n}$ และ $ac \equiv bc \pmod{n}$
6. ถ้า $a \equiv b \pmod{n}$ แล้ว $a^k \equiv b^k \pmod{n}$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก k

บทแทรก 2.3 [22] ให้ $n > 1$ เป็นจำนวนเต็มบวก และ a, b เป็นจำนวนเต็มใด ๆ ที่ไม่ใช่ศูนย์ จะได้ว่า ถ้า $a \equiv b \pmod{n}$ แล้ว $a^k \equiv b^k \pmod{n}$ สำหรับทุกจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ k

ทฤษฎีบท 2.4 [22] ถ้า z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ แล้ว $z^2 \equiv 0 \pmod{4}$ หรือ $z^2 \equiv 1 \pmod{4}$

บทนิยาม 2.5 [21] ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะคี่ และ a เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ $\gcd(a, p) = 1$ ถ้า $x^2 \equiv a \pmod{p}$ มีผลเฉลย จะเรียก a ว่า เป็นส่วนตกค้างกำลังสอง (quadratic residue) ของ p และถ้าไม่มีผลเฉลย จะเรียก a ว่า ไม่เป็นส่วนตกค้างกำลังสอง (quadratic non-residue) ของ p

บทนิยาม 2.6 [21] ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะคี่ และ a เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ $\gcd(a, p) = 1$

สัญลักษณ์ลองจองด์ (Legendre symbol) (a/p) นิยามโดย

$(a/p) = 1$ เมื่อ a เป็นส่วนตกค้างกำลังสองของ p

$(a/p) = -1$ เมื่อ a ไม่เป็นส่วนตกค้างกำลังสองของ p

ทฤษฎีบท 2.7 [21] ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะคี่ และ a, b เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ $\gcd(a, p) = 1$ และ $\gcd(b, p) = 1$ จะได้ว่าสมบัติต่อไปนี้เป็นจริง

1. ถ้า $a \equiv b \pmod{p}$ แล้ว $(a/p) = (b/p)$

2. $(a^2/p) = 1$

3. $(a/p) \equiv a^{(p-1)/2} \pmod{p}$

4. $(ab/p) = (a/p)(b/p)$

5. $(1/p) = 1$ และ $(-1/p) = (-1)^{(p-1)/2}$

ทฤษฎีบท 2.8 [21] ให้ $p \neq 3$ เป็นจำนวนเฉพาะคี่ จะได้ว่า

$(3/p) = 1$ เมื่อ $p \equiv 1 \pmod{12}$ หรือ $p \equiv 11 \pmod{12}$

$(3/p) = -1$ เมื่อ $p \equiv 5 \pmod{12}$ หรือ $p \equiv 7 \pmod{12}$

นอกจากนี้ยังมีอีกหนึ่งทฤษฎีบทที่มีบทบาทสำคัญในงานวิจัยนี้ได้พิสูจน์โดย Sroysang เมื่อปี ค.ศ. 2012 ดังนี้

ทฤษฎีบท 2.9 [23] $(1, 2)$ เป็นผลเฉลย (x, z) ผลเฉลยเดียวของสมการไดโอแฟนไทน์ $3^x + 1 = z^2$ เมื่อ x และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

3. ผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $3^x + p^y \cdot q^z = u^2$

ทฤษฎีบท 3.1 ให้ p และ q เป็นจำนวนเฉพาะ โดยที่ $p \equiv 5 \pmod{12}$ และ $q \equiv 5 \pmod{12}$ จะได้ว่า สมการไดโอแฟนไทน์

$$3^x + p^y \cdot q^z = u^2 \quad (1)$$

มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ (x, y, z, u) เพียงผลเฉลยเดียว คือ $(1, 0, 0, 2)$

พิสูจน์ ให้ x, y, z และ u เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ และทำให้สมการ (1) เป็นจริง เนื่องจาก $p \equiv 5 \pmod{12}$ และ $q \equiv 5 \pmod{12}$ เพราะฉะนั้น $p \equiv 1 \pmod{4}$ และ $q \equiv 1 \pmod{4}$ ตามลำดับ ดังนั้นจากบทแทรก 2.3 จะได้ว่า $p^y \equiv 1 \pmod{4}$ และ $q^z \equiv 1 \pmod{4}$ และจากทฤษฎีบท 2.2 ข้อ 4 จะได้ว่า

$$p^y \cdot q^z \equiv 1 \pmod{4} \quad (2)$$

และจาก $3 \equiv -1 \pmod{4}$ ดังนั้นบทแทรก 2.3 จะได้ว่า $3^x \equiv (-1)^x \pmod{4}$ และจากสมภาค (2) จะได้ว่า $3^x + p^y \cdot q^z \equiv (-1)^x + 1 \pmod{4}$ และจากสมการ (1) จะได้ว่า

$$u^2 \equiv (-1)^x + 1 \pmod{4} \quad (3)$$

ต่อไปจะแสดงว่า x เป็นจำนวนคี่ โดยใช้การพิสูจน์แบบหาข้อขัดแย้ง สมมติว่า x เป็นจำนวนคู่ ดังนั้นจากสมภาค (3) จะได้ว่า $u^2 \equiv 2 \pmod{4}$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เนื่องจากขัดแย้งกับทฤษฎีบท 2.4 เพราะฉะนั้น x เป็นจำนวนคี่ ในลำดับถัดไปจะแยกพิจารณา 2 กรณี ดังต่อไปนี้

กรณีที่ 1. $y = 0$ ดังนั้นจากสมการ (1) จะได้ว่า

$$3^x + q^z = u^2 \quad (4)$$

กรณีที่ 1.1 $z = 0$ ดังนั้นจากสมการ (4) จะได้ว่า $3^x + 1 = u^2$ และเนื่องจากทฤษฎีบท 2.9 จะได้ว่า $x = 1$ และ $u = 2$ เพราะฉะนั้น $(x, y, z, u) = (1, 0, 0, 2)$

กรณีที่ 1.2 $z \geq 1$ เพราะฉะนั้น $q^z \equiv 0 \pmod{q}$ ดังนั้นจากทฤษฎีบท 2.2 จะได้ว่า $3^x + q^z \equiv 3^x + 0^z \equiv 3^x \pmod{q}$ และจากสมการ (4) จะได้ว่า $u^2 \equiv 3^x \pmod{q}$ เพราะฉะนั้น $(3^x/q) = 1$ และจากทฤษฎีบท 2.7 ข้อ 4 จะได้ว่า $(3^x/q) = (3/q)^x$ และจาก x เป็นจำนวนคี่ ดังนั้น $(3/q) = 1$ เพราะฉะนั้นจากทฤษฎีบท 2.8 จะได้ว่า $q \equiv 1 \pmod{12}$ หรือ $q \equiv 11 \pmod{12}$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เนื่องจาก $q \equiv 5 \pmod{12}$ ดังนั้น ในกรณีนี้จึงไม่มีผลเฉลย

กรณีที่ 2. $y \geq 1$ เพราะฉะนั้น $p^y \equiv 0 \pmod{p}$ และเนื่องจากทฤษฎีบท 2.2 ข้อ 4 จะได้ว่า $p^y \cdot q^z \equiv 0 \cdot q^z \equiv 0 \pmod{p}$ ดังนั้น $3^x + p^y \cdot q^z \equiv 3^x + 0 \equiv 3^x \pmod{p}$ และจากสมการ (1) จะได้ว่า $u^2 \equiv 3^x \pmod{p}$ เพราะฉะนั้น $(3^x/p) = 1$ และจากทฤษฎีบท 2.7 ข้อ 4 จะได้ว่า $(3^x/p) = (3/p)^x$ และเนื่องจาก x เป็นจำนวนคี่ ดังนั้น $(3/p) = 1$ เพราะฉะนั้นจากทฤษฎีบท 2.8 จะได้ว่า $p \equiv 1 \pmod{12}$ หรือ $p \equiv 11 \pmod{12}$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เนื่องจาก $p \equiv 5 \pmod{12}$ ดังนั้น ในกรณีนี้จึงไม่มีผลเฉลย

จากทั้งสองกรณี สรุปได้ว่า สมการไดโอแฟนไทน์ (1) มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียงผลเฉลยเดียวเท่านั้น คือ $(x, y, z, u) = (1, 0, 0, 2)$

จากทฤษฎีบท 3.1 สามารถนำไปใช้พิสูจน์ทฤษฎีบทที่มีผู้ค้นพบก่อนหน้านี้ได้ เช่น

ทฤษฎีบท 3.2 [23] $(1, 0, 2)$ เป็นผลเฉลย (x, y, z) เพียงผลเฉลยเดียวของสมการไดโอแฟนไทน์ $3^x + 5^y = z^2$ เมื่อ x, y และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

ทฤษฎีบท 3.3 [2] $(1, 0, 2)$ เป็นผลเฉลย (x, y, z) เพียงผลเฉลยเดียวของสมการไดโอแฟนไทน์ $3^x + 17^y = z^2$ เมื่อ x, y และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

ทฤษฎีบท 3.4 [11] $(1, 0, 2)$ เป็นผลเฉลย (x, y, z) เพียงผลเฉลยเดียวของสมการไดโอแฟนไทน์ $3^x + 85^y = z^2$ เมื่อ x, y และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

นอกจากนี้ในงานวิจัยของ Sroysang [11] ได้แสดงว่า $(1, 0, 0, 2)$ เป็นผลเฉลย (x, u, v, z) ผลเฉลยหนึ่งของสมการไดโอแฟนไทน์ $3^x + 5^u \cdot 17^v = z^2$ ซึ่งในที่นี้ หากพิจารณาจากทฤษฎีบท 3.1 จะสรุปเพิ่มเติมได้ว่า ผลเฉลยดังกล่าวเป็นเพียงผลเฉลยเดียวเท่านั้น

ทฤษฎีบท 3.5 สมการไดโอแฟนไทน์ $3^x + 5^u \cdot 17^v = z^2$ มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ (x, u, v, z) เพียงผลเฉลยเดียว คือ $(1, 0, 0, 2)$

ทฤษฎีบท 3.6 ให้ p และ q เป็นจำนวนเฉพาะ โดยที่ $p \equiv 5 \pmod{12}$ และ $q \equiv 5 \pmod{12}$ จะได้ว่า สมการไดโอแฟนไทน์

$$3^x + p^y \cdot q^z = u^{2t} \quad (5)$$

มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ (x, y, z, u, t) เพียงผลเฉลยเดียว คือ $(1, 0, 0, 2, 1)$

พิสูจน์ ให้ x, y, z, u และ t เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ซึ่งทำให้สมการ (5) เป็นจริง เพราะฉะนั้น $3^x + p^y \cdot q^z = (u^t)^2$ และเนื่องจากทฤษฎีบท 3.1 จะได้ว่า $x=1, y=0, z=0$ และ $u^t=2$ ดังนั้น $u=2$ และ $t=1$ นั่นคือ $(x, y, z, u, t) = (1, 0, 0, 2, 1)$

4. สรุปและอภิปรายผลการวิจัย

ในงานวิจัยนี้ได้พิสูจน์ว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $3^x + p^y \cdot q^z = u^{2t}$ เมื่อ x, y, z และ u เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ และ p, q เป็นจำนวนเฉพาะ โดยที่ $p \equiv 5 \pmod{12}$ และ $q \equiv 5 \pmod{12}$ มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียงผลเฉลยเดียวเท่านั้น คือ $(x, y, z, u) = (1, 0, 0, 2)$ ซึ่งในการพิสูจน์เพื่อหาผลเฉลยดังกล่าวได้ใช้เพียงความรู้พื้นฐานทางทฤษฎีจำนวน เช่น จำนวนเฉพาะ (prime number) สมภาค (congruence) ส่วนตกค้างกำลังสอง (quadratic residue) และสัญลักษณ์เลอจองค์ (Legendre symbol) เป็นต้น และจากผลงานวิจัยนี้ทำให้ได้อรรถความรู้ใหม่ซึ่งขยายจากองค์ความรู้เดิม สังเกตได้จากการนำไปใช้พิสูจน์ทฤษฎีบทที่มีผู้คิดค้นก่อนหน้านี้ได้ เช่น ทฤษฎีบท 3.2 – 3.4 และสามารถทำให้งานวิจัยของ Sroysang [11] มีความสมบูรณ์ยิ่งขึ้นดังที่ได้ปรากฏในทฤษฎีบท 3.5 นอกจากนี้ ยังสามารถนำผลวิจัยที่ได้ไปใช้แสดงว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $3^x + p^y \cdot q^z = u^{2t}$ มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ (x, y, z, u, t) เพียงผลเฉลยเดียว คือ $(1, 0, 0, 2, 1)$ แต่อย่างไรก็ตามในงานวิจัยนี้

ยังมีข้อจำกัดภายใต้เงื่อนไขที่ $p \equiv 5 \pmod{12}$ และ $q \equiv 5 \pmod{12}$ เนื่องจากการพิสูจน์ในที่นี้มีความจำเป็นต้องใช้เงื่อนไข $p \equiv 1 \pmod{4}$, $q \equiv 1 \pmod{4}$ และ $(3/p) = (3/q) = -1$ เพราะฉะนั้น จึงยังคงเป็นสิ่งที่น่าสนใจในการศึกษาค้นคว้าต่อไปเพื่อหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ดังกล่าวภายใต้เงื่อนไขอื่น

คำขอบคุณ

คณะผู้วิจัย ขอขอบคุณสถาบันวิจัยและพัฒนา คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเทพสตรีที่ให้การสนับสนุนการทำวิจัยในครั้งนี้

5. เอกสารอ้างอิง

- [1] Sroysang, B. (2013). More on the Diophantine equation $2^x + 3^y = z^2$. International Journal of Pure and Applied Mathematics, 84(2), p.p. 133-137.
- [2] Sroysang, B. (2013). On the Diophantine equation $3^x + 17^y = z^2$. International Journal of Pure and Applied Mathematics, 89(1), p.p. 111-114.
- [3] Rabago, J.F.T. (2013). On two Diophantine equations $3^x + 19^y = z^2$ and $3^x + 91^y = z^2$. International Journal of Mathematics and Scientific Computing, 3(1), p.p. 28-29.
- [4] Asthana, S. and Singh, M.M. (2017). On the Diophantine equation $3^x + 13^y = z^2$. International Journal of Pure and Applied Mathematics, 114(2), p.p. 301-304.
- [5] Rao, C.G. (2018). On the Diophantine equation $3^x + 7^y = z^2$. EPRA International Journal of Research and Development, 3(6), p.p. 93-95.
- [6] Asthana, S. and Singh, M.M. (2020). On the Diophantine equation $3^x + 117^y = z^2$. GANITA, 70(2), p.p. 43-47.
- [7] Tangjai, W. and Chubthaisong, C. (2021). On the Diophantine equation $3^x + p^y = z^2$ where $p \equiv 2 \pmod{3}$. WSEAS Transactions on Mathematics, 20, p.p. 283-287.
- [8] Paisal, K., Chayapham, P. and Lertlop, W. (2024). Solutions of the Diophantine equations $3^x + 97^y = z^2$ and $11^x + 89^y = z^2$. The Golden Teak: Science and Technology Journal, 11(2), p.p. 13-17.
- [9] Manikandan, K. and Venkatraman, R. (2025). Exploring Diophantine equations Involving Twin Primes: A note on $3^x + p^y = z^2$. Palestine Journal of Mathematics, 14(SII), p.p. 68-72.
- [10] Sroysang, B. (2014). On the Diophantine equation $3^x + 45^y = z^2$. International Journal of Pure and Applied Mathematics, 91(2), p.p. 269-272.
- [11] Sroysang, B. (2014). More on the Diophantine equation $3^x + 85^y = z^2$. International Journal of Pure and Applied Mathematics, 91(1), p.p. 131-134.
- [12] Sangam, B.R. (2020). On the Diophantine equations $3^x + 6^y = z^2$ and $5^x + 8^y = z^2$. Annals of Pure and Applied Mathematics, 22(1), p.p. 7-11.
- [13] Biswas, D. (2022). Does the solution to the non-linear Diophantine equation $3^x + 35^y = z^2$ exists?. Journal of Scientific Research, 14(3), p.p. 861-865.

-
- [14] Srimud, K. and Tadee, S. (2023). On the Diophantine equation $3^x + b^y = z^2$. International Journal of Mathematics and Computer Science, 18(1), p.p. 137-142.
- [15] Malavika, N. and Venkatraman, R. (2024). On the exponential Diophantine equation $3^x + 121^y = z^2$. International Journal of Mathematics and Computer Science, 19(3), p.p. 917-920.
- [16] Biswas, D. (2024). A note on the Diophantine equation $3^x + 63^y = z^2$. Journal of Physical Sciences, 29, p.p. 23-27.
- [17] Biswas, D. (2025). A discussion on the solution(s) of the Diophantine equation $3^x + 15^y = z^2$. Journal of Scientific Research, 17(1), p.p. 129-132.
- [18] Rao, C.G. (2025). On exploring the exponential Diophantine equation $(3^k - 1)^x + (3^k)^y = z^2$ with k is a nonnegative integer. Annals of Pure and Applied Mathematics, 32(1), p.p. 37-47.
- [19] Ai-juan, X. and Mou-jie, D. (2015). On the Diophantine equation $3^x + 5^y \cdot 19^z = u^2$. Journal of Progressive Research in Mathematics, 5(3), p.p. 578-581.
- [20] Vesarachasart, S., Makuwing, A., Wasurakka, N. and Phattharachittra, K. (2019). On the Diophantine equation $3^x + 5^y \cdot 7^z = u^2$. Thai Journal of Science and Technology, 8(3), p.p. 220-225.
- [21] Burton, D.M. (2010). Elementary number theory. 7th ed., New York: McGraw-Hill. p.p. 63-189.
- [22] Raksangoen, P., Tongnuy, P. and Tadee, S. (2025). On the solutions of the Diophantine equation $7^x + 35^y = z^2$. Journal of Science and Technology RMUTSB, 9(1), p.p. 102-109.
- [23] Sroysang, B. (2012). On the Diophantine equation $3^x + 5^y = z^2$. International Journal of Pure and Applied Mathematics, 81(4), p.p. 605-608.