

ผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $7^x + 35^y = z^2$ ON THE SOLUTIONS OF THE DIOPHANTINE EQUATION $7^x + 35^y = z^2$ พรรษา รักษาเงิน¹ ภูริสิริ ทองนุ้ย¹ สุธน ตาดิ^{1*}Phansa Raksangoen¹, Purisiri Tongnuy¹, Suton Tadee^{1*}¹สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเทพสตรี¹Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Thepsatri Rajabhat University

* Corresponding author e-mail: suton.t@lawasri.tru.ac.th

วันที่รับบทความ 22 มีนาคม 2568 วันที่แก้ไขบทความ 28 เมษายน 2568 วันที่ตอบรับบทความ 29 เมษายน 2568

บทคัดย่อ

ในช่วงประมาณหนึ่งทศวรรษที่ผ่านมา สมการไดโอแฟนไทน์ที่อยู่ในรูป $a^x + b^y = z^2$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนเต็มบวกที่กำหนดมาให้ ได้รับความสนใจในการศึกษาหาผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ (x, y, z) อย่างกว้างขวาง และในงานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาและหาผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบทั้งหมดของสมการไดโอแฟนไทน์ $7^x + 35^y = z^2$ เมื่อ x, y และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ โดยใช้การพิสูจน์ตามหลักการทางคณิตศาสตร์ประกอบกับความรู้พื้นฐานทางทฤษฎีจำนวน เช่น การหารลงตัว จำนวนเฉพาะ และสมภาค เป็นต้น ซึ่งในการพิสูจน์ได้แยกพิจารณาออกเป็น 4 กรณี ดังนี้ กรณีที่ 1 x เป็นจำนวนคู่ และ y เป็นจำนวนคู่, กรณีที่ 2 x เป็นจำนวนคี่ และ y เป็นจำนวนคี่, กรณีที่ 3 x เป็นจำนวนคี่ และ y เป็นจำนวนคู่ และกรณีที่ 4 x เป็นจำนวนคู่ และ y เป็นจำนวนคี่ ผลการวิจัย พบว่า สมการไดโอแฟนไทน์ $7^x + 35^y = z^2$ มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียงผลเฉลยเดียวเท่านั้น คือ $(x, y, z) = (0, 1, 6)$ ซึ่งวิธีการในการหาผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบของสมการไดโอแฟนไทน์ดังกล่าวสามารถนำไปประยุกต์ใช้ในการหาผลเฉลยของสมการที่อยู่ในลักษณะเดียวกันได้

คำสำคัญ: สมการไดโอแฟนไทน์; การหารลงตัว; จำนวนเฉพาะ; สมภาค

ABSTRACT

Over the past decade, the Diophantine equation in the form $a^x + b^y = z^2$, where a and b are two fixed positive integers, has received widespread attention due to its non-negative integer solutions (x, y, z) . This research aimed to study and find all non-negative integer solutions of the Diophantine equation $7^x + 35^y = z^2$, where x, y and z are non-negative integers, by using mathematical proofs in conjunction with elementary concepts of number theory such as divisibility, prime number and congruence. In the proof, we have divided the consideration into 4 cases as follows: case 1. x is even and y is even, case 2. x is odd and y is odd, case 3. x is odd and y

is even and case 4. x is even and y is odd. The research results found that the Diophantine equation $7^x + 35^y = z^2$ has unique non-negative integer solution, which is $(x, y, z) = (0, 1, 6)$. The method for finding non-negative integer solutions of the Diophantine equation can be applied to finding solutions of equations of the same type.

Keywords: Diophantine equation; Divisibility; Prime number; Congruence

1. บทนำ

สมการไดโอแฟนไทน์ (Diophantine equation) เป็นสมการหนึ่งที่มีบทบาทสำคัญในทางทฤษฎีจำนวน (Number theory) และได้รับความสนใจอย่างกว้างขวาง เนื่องจากความรู้เกี่ยวกับสมการไดโอแฟนไทน์สามารถนำไปประยุกต์ใช้ในหลาย ๆ สาขา เช่น เรขาคณิต เศรษฐศาสตร์ และวิทยาศาสตร์ เป็นต้น โดยสมการไดโอแฟนไทน์หมายถึง สมการที่พิจารณาเฉพาะผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มเท่านั้น และได้ตั้งชื่อสมการนี้ขึ้นเพื่อเป็นเกียรติให้กับ ดีโอฟานโตส แห่งอะเล็กซานเดรีย (Diophantos of Alexandria) ซึ่งเป็นนักคณิตศาสตร์ที่มีชื่อเสียงและเชื่อว่าเกิดอยู่ในระหว่างปี ค.ศ. 250 – 300 โดยผลงานของดีโอฟานโตสมีมากมายและมีชื่อเสียง เช่น หนังสือชื่อ เลขคณิต (Arithmetica) ด้วยเหตุนี้ ดีโอฟานโตสจึงได้รับการยกย่องว่าเป็น “บิดาของพีชคณิต” [1]

สมการไดโอแฟนไทน์นั้นมีหลากหลายรูปแบบ ซึ่งในที่นี้จะสนใจศึกษาสมการไดโอแฟนไทน์ที่อยู่ในรูปเลขชี้กำลัง (Exponential Diophantine equation) รูปแบบหนึ่ง กล่าวคือ สมการไดโอแฟนไทน์ที่อยู่ในรูป $a^x + b^y = z^2$ เมื่อ x, y, z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบและ a, b เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่ $a = 7$ หรือ $b = 35$ มีตัวอย่างงานวิจัยที่ได้ศึกษาเกี่ยวกับสมการไดโอแฟนไทน์ที่น่าสนใจ เช่น ในปี ค.ศ. 2011 Suvarnamani, Singta and Chotchaisithit [2] ได้แสดงว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $4^x + 7^y = z^2$ ไม่มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ต่อมาในปี ค.ศ. 2013 Sroysang [3] [4] ได้แสดงว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $7^x + 8^y = z^2$ มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ (x, y, z) เพียงผลเฉลยเดียว คือ $(0, 1, 3)$ และได้แสดงว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $5^x + 7^y = z^2$ ไม่มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ และในปีถัดมา Sroysang [5] [6] ได้แสดงว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $7^x + 31^y = z^2$, $7^x + 19^y = z^2$ และ $7^x + 91^y = z^2$ ไม่มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ต่อมาในปี ค.ศ. 2017 Somanath, Kannan and Raja [7] ได้แสดงว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $7^x + 49^y = z^2$ ไม่มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ และถัดมาในปี ค.ศ. 2018 Rao [8] ได้แสดงว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $3^x + 7^y = z^2$ มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ (x, y, z) เพียงสองผลเฉลยเท่านั้น คือ $(1, 0, 2)$ และ $(2, 1, 4)$ และในปีเดียวกัน Gupta, Kumar and Kishan [9] ได้แสดงว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $7^x + 13^y = z^2$ ไม่มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

ในปี ค.ศ. 2019 Burshtein [10] ได้แสดงว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $7^x + 10^y = z^2$ ไม่มีผลเฉลยจำนวนเต็มบวก และในปีเดียวกัน Asthana and Singh [11] ได้แสดงว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $2^x + 7^y = z^2$ มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ (x, y, z) เพียงสามผลเฉลยเท่านั้น คือ $(3, 0, 3)$, $(5, 2, 9)$ และ $(1, 1, 3)$ ต่อมาในปี ค.ศ. 2020 Burshtein [12] ได้แสดงว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $7^x + 11^y = z^2$ ไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวก และในปี ค.ศ. 2022 Borah and Dutta [13] ได้แสดงว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $7^x + 32^y = z^2$ มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ (x, y, z) เพียงผลเฉลยเดียว คือ $(2, 1, 9)$ และนอกจากนี้ Pakapongpun and Chatthae [14] ได้ค้นพบ

เงื่อนไขการไม่มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบของสมการไดโอแฟนไทน์ $p^x + 7^y = z^2$ เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะ และเมื่อไม่นานมานี้ ในปี ค.ศ. 2024 Singh [15] ได้แสดงว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $7^x + 17^y = z^2$ ไม่มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

จากการศึกษางานวิจัยดังกล่าวข้างต้น ทำให้ผู้วิจัยสนใจที่จะศึกษาหาผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ (x, y, z) ของสมการไดโอแฟนไทน์ $7^x + 35^y = z^2$ ซึ่งยังไม่มีการศึกษาหาผลเฉลยมามาก่อน โดยการหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ดังกล่าว นั้น ในที่นี้จะใช้ความรู้พื้นฐานทางทฤษฎีจำนวน เช่น การหารลงตัว (Divisibility) จำนวนเฉพาะ (Prime number) และสมภาค (Congruence) เป็นต้น

2. ความรู้พื้นฐาน

ในหัวข้อนี้จะทบทวนความรู้เกี่ยวกับความหมายและสมบัติเบื้องต้นของสมภาค ดังต่อไปนี้

บทนิยาม 1. [1, p. 63] ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก จะกล่าวว่าสองจำนวนเต็ม a และ b สมภาค หรือ คอนกรูเอนซ์มอดุโล n เขียนแทนด้วย $a \equiv b \pmod{n}$ ถ้า n หาร $a - b$ ลงตัว หรือ $a - b = nk$ สำหรับบางจำนวนเต็ม k

ทฤษฎีบท 1. [1, p. 65] ให้ $n > 1$ เป็นจำนวนเต็มบวก และ a, b, c, d เป็นจำนวนเต็มใด ๆ จะได้ว่าข้อความต่อไปนี้เป็นจริง

1. $a \equiv a \pmod{n}$
2. ถ้า $a \equiv b \pmod{n}$ แล้ว $b \equiv a \pmod{n}$
3. ถ้า $a \equiv b \pmod{n}$ และ $b \equiv c \pmod{n}$ แล้ว $a \equiv c \pmod{n}$
4. ถ้า $a \equiv b \pmod{n}$ และ $c \equiv d \pmod{n}$ แล้ว $a + c \equiv b + d \pmod{n}$ และ $ac \equiv bd \pmod{n}$
5. ถ้า $a \equiv b \pmod{n}$ แล้ว $a + c \equiv b + c \pmod{n}$ และ $ac \equiv bc \pmod{n}$
6. ถ้า $a \equiv b \pmod{n}$ แล้ว $a^k \equiv b^k \pmod{n}$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก k

บทแทรก 2. ให้ $n > 1$ เป็นจำนวนเต็มบวก และ a, b เป็นจำนวนเต็มใด ๆ จะได้ว่า ถ้า $a \equiv b \pmod{n}$ แล้ว $a^k \equiv b^k \pmod{n}$ สำหรับทุกจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ k

พิสูจน์ ให้ $a \equiv b \pmod{n}$ และ k เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

กรณีที่ 1. $k = 0$ จากทฤษฎีบท 1 ข้อ 1 จะได้ว่า $1 \equiv 1 \pmod{n}$ ดังนั้น $a^0 \equiv b^0 \pmod{n}$

เพราะฉะนั้น $a^k \equiv b^k \pmod{n}$

กรณีที่ 2. $k \geq 1$ จากทฤษฎีบท 1 ข้อ 6 จะได้ว่า $a^k \equiv b^k \pmod{n}$

จากทั้ง 2 กรณี สรุปได้ว่า $a^k \equiv b^k \pmod{n}$ สำหรับทุกจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ k

ทฤษฎีบท 3. ถ้า z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ แล้ว $z^2 \equiv 0 \pmod{4}$ หรือ $z^2 \equiv 1 \pmod{4}$

พิสูจน์ ให้ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ จากขั้นตอนวิธีการหาร (the Division algorithm) จะมีจำนวนเต็ม q และ r ซึ่งทำให้ $z = 4q + r$ โดยที่ $0 \leq r < 4$ ดังนั้น $z - r = 4q$ เพราะฉะนั้น $z \equiv r \pmod{4}$

กรณีที่ 1. $r = 0$ ดังนั้น $z \equiv 0 \pmod{4}$ และจากทฤษฎีบท 1 ข้อ 6 จะได้ว่า $z^2 \equiv 0 \pmod{4}$

กรณีที่ 2. $r=1$ ดังนั้น $z \equiv 1(\text{mod } 4)$ และจากทฤษฎีบท 1 ข้อ 6 จะได้ว่า $z^2 \equiv 1(\text{mod } 4)$

กรณีที่ 3. $r=2$ ดังนั้น $z \equiv 2(\text{mod } 4)$ และจากทฤษฎีบท 1 ข้อ 6 จะได้ว่า $z^2 \equiv 4(\text{mod } 4)$ และเนื่องจาก $4 \equiv 0(\text{mod } 4)$ ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 1 ข้อ 3 จะได้ว่า $z^2 \equiv 0(\text{mod } 4)$

กรณีที่ 4. $r=3$ ดังนั้น $z \equiv 3(\text{mod } 4)$ และจากทฤษฎีบท 1 ข้อ 6 จะได้ว่า $z^2 \equiv 9(\text{mod } 4)$ และเนื่องจาก $9 \equiv 1(\text{mod } 4)$ ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 1 ข้อ 3 จะได้ว่า $z^2 \equiv 1(\text{mod } 4)$

จากทั้ง 4 กรณี สรุปได้ว่า $z^2 \equiv 0(\text{mod } 4)$ หรือ $z^2 \equiv 1(\text{mod } 4)$

ทฤษฎีบท 4. ให้ n เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ จะได้ว่า ถ้า n เป็นจำนวนคี่ แล้ว $7^n \equiv 7(\text{mod } 25)$ หรือ $7^n \equiv 18(\text{mod } 25)$

พิสูจน์ ให้ n เป็นจำนวนคี่ ดังนั้นจะมีจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ k ซึ่งทำให้ $n = 2k + 1$ และเนื่องจากทฤษฎีบท 1 จะได้ว่า

$$7^n \equiv 7^{2k+1} \equiv 7 \cdot 49^k \equiv 7 \cdot (-1)^k (\text{mod } 25)$$

กรณีที่ 1. k เป็นจำนวนคู่ ดังนั้น $(-1)^k \equiv 1(\text{mod } 25)$ และเนื่องจากทฤษฎีบท 1 ข้อ 5 จะได้ว่า $7 \cdot (-1)^k \equiv 7(\text{mod } 25)$ เพราะฉะนั้น $7^n \equiv 7(\text{mod } 25)$

กรณีที่ 2. k เป็นจำนวนคี่ ดังนั้น $(-1)^k \equiv -1(\text{mod } 25)$ และเนื่องจากทฤษฎีบท 1 ข้อ 5 จะได้ว่า $7 \cdot (-1)^k \equiv -7 \equiv 18(\text{mod } 25)$ เพราะฉะนั้น $7^n \equiv 18(\text{mod } 25)$

จากทั้ง 2 กรณี สรุปได้ว่า $7^n \equiv 7(\text{mod } 25)$ หรือ $7^n \equiv 18(\text{mod } 25)$

3. ผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $7^x + 35^y = z^2$

ให้ x, y และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ซึ่งทำให้

$$7^x + 35^y = z^2 \quad (1)$$

เนื่องจาก $7 \equiv -1(\text{mod } 4)$ และ $35 \equiv -1(\text{mod } 4)$ และบทแทรก 2 จะได้ว่า $7^x \equiv (-1)^x(\text{mod } 4)$ และ $35^y \equiv (-1)^y(\text{mod } 4)$ และโดยทฤษฎีบท 1 ข้อ 4 จะได้ว่า $7^x + 35^y \equiv (-1)^x + (-1)^y(\text{mod } 4)$ ดังนั้นจากสมการ (1) จะได้ว่า

$$z^2 \equiv (-1)^x + (-1)^y (\text{mod } 4) \quad (2)$$

ในลำดับถัดไปจะแยกพิจารณา 4 กรณี ดังต่อไปนี้

กรณีที่ 1. x เป็นจำนวนคู่ และ y เป็นจำนวนคู่ จะได้ว่า $(-1)^x + (-1)^y \equiv 1 + 1 \equiv 2(\text{mod } 4)$ และจากสมการ (2) และทฤษฎีบท 1 ข้อ 3 ดังนั้น $z^2 \equiv 2(\text{mod } 4)$ ซึ่งขัดแย้งกับทฤษฎีบท 3 เพราะฉะนั้นกรณีที่ 1 เป็นไปไม่ได้

กรณีที่ 2. x เป็นจำนวนคี่ และ y เป็นจำนวนคี่ ดังนั้น $(-1)^x + (-1)^y \equiv -1 - 1 \equiv -2(\text{mod } 4)$ และจากสมการ (2) และทฤษฎีบท 1 ข้อ 3 ดังนั้น $z^2 \equiv -2(\text{mod } 4)$ และจาก $-2 \equiv 2(\text{mod } 4)$ ดังนั้น

โดยทฤษฎีบท 1 ข้อ 3 จะได้ว่า $z^2 \equiv 2 \pmod{4}$ ซึ่งขัดแย้งกับทฤษฎีบท 3 เพราะฉะนั้น กรณีที่ 2 เป็นไปไม่ได้

กรณีที่ 3. x เป็นจำนวนคี่ และ y เป็นจำนวนคู่ ดังนั้น จะมีจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ h ซึ่งทำให้ $y = 2h$ เพราะฉะนั้นจากสมการ (1) จะได้ว่า

$$z^2 - 35^{2h} = (z - 35^h)(z + 35^h) = 7^x \quad (3)$$

และเนื่องจาก 7 เป็นจำนวนเฉพาะ ดังนั้น จะมีจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ u โดยที่ $u \leq x$ ซึ่งทำให้

$$z - 35^h = 7^u \quad (4)$$

และ
$$z + 35^h = 7^{x-u} \quad (5)$$

จากสมการ (4) และ (5) จะได้ว่า

$$2 \cdot 5^h \cdot 7^h = 7^u (7^{x-2u} - 1) \quad (6)$$

จากสมการ (6) และ $\gcd(7^u, 7^{x-2u} - 1) = 1$ ดังนั้น $h = u$ และ

$$2 \cdot 5^h = 7^{x-2h} - 1 \quad (7)$$

สมมติว่า $h = 0$ ดังนั้นจากสมการ (7) จะได้ว่า $2 = 7^x - 1$ หรือ $7^x = 3$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เนื่องจาก x เป็นจำนวนเต็ม เพราะฉะนั้น $h \geq 1$ จะได้ว่า $5^h \equiv 0 \pmod{5}$ และโดยทฤษฎีบท 1 ข้อ 5 จะได้ว่า $2 \cdot 5^h \equiv 0 \pmod{5}$ ดังนั้นจากสมการ (7) จะได้ว่า $7^{x-2h} - 1 \equiv 0 \pmod{5}$ และจาก x เป็นจำนวนคี่ ดังนั้นจะมีจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ k ซึ่งทำให้ $x = 2k + 1$ เพราะฉะนั้น

$$7^{2(k-h)+1} - 1 \equiv 0 \pmod{5} \quad (8)$$

และเนื่องจาก

$$7^{2(k-h)+1} - 1 \equiv 7 \cdot 49^{k-h} - 1 \equiv 7(-1)^{k-h} - 1 \pmod{5} \quad (9)$$

ดังนั้นสามารถแยกพิจารณาได้ 2 กรณี ดังนี้

กรณีที่ 3.1 $k - h$ เป็นจำนวนคี่ ดังนั้น $7(-1)^{k-h} - 1 \equiv 6 \equiv 1 \pmod{5}$ และเนื่องจากสมภาค (9) จะได้ว่า $7^{2(k-h)+1} - 1 \equiv 1 \pmod{5}$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เนื่องจากขัดแย้งกับสมภาค (8)

กรณีที่ 3.2 $k - h$ เป็นจำนวนคี่ ดังนั้น $7(-1)^{k-h} - 1 \equiv -8 \equiv 2 \pmod{5}$ และเนื่องจากสมภาค (9) จะได้ว่า $7^{2(k-h)+1} - 1 \equiv 2 \pmod{5}$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เนื่องจากขัดแย้งกับสมภาค (8)

สรุปได้ว่ากรณีที่ 3 เป็นไปไม่ได้

กรณีที่ 4. x เป็นจำนวนคู่ และ y เป็นจำนวนคี่ ดังนั้น จะมีจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ k ซึ่งทำให้ $x = 2k$ เพราะฉะนั้นจากสมการ (1) จะได้ว่า

$$z^2 - 7^{2k} = (z - 7^k)(z + 7^k) = 5^y \cdot 7^y \quad (10)$$

และเนื่องจาก 5 และ 7 เป็นจำนวนเฉพาะ ดังนั้น จะมีจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ u และ v โดยที่ $u \leq y$ และ $v \leq y$ ซึ่งทำให้

$$z - 7^k = 5^u \cdot 7^v \quad (11)$$

$$\text{และ} \quad z + 7^k = 5^{y-u} \cdot 7^{y-v} \quad (12)$$

จากสมการ (11) และ (12) จะได้ว่า

$$2 \cdot 7^k = 5^{y-u} \cdot 7^{y-v} - 5^u \cdot 7^v \quad (13)$$

สมมติว่า $u > 0$ และ $y - u > 0$ ดังนั้น 5 หาร $5^{y-u} \cdot 7^{y-v} - 5^u \cdot 7^v$ ลงตัว เพราะฉะนั้นจากสมการ (13) จะได้ว่า 5 หาร $2 \cdot 7^k$ ลงตัว ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เพราะฉะนั้น $u = 0$ หรือ $y - u = 0$

กรณีที่ 4.1 $u = 0$ จากสมการ (13) จะได้ว่า

$$2 \cdot 7^k = 5^y \cdot 7^{y-v} - 7^v \quad (14)$$

กรณีที่ 4.1.1 $y - v > v$ จากสมการ (14) จะได้ว่า

$$2 \cdot 7^k = 7^v (5^y \cdot 7^{y-2v} - 1) \quad (15)$$

จากสมการ (15) และ $\gcd(7^v, 5^y \cdot 7^{y-2v} - 1) = 1$ จะได้ว่า $k = v$ และ $2 = 5^y \cdot 7^{y-2v} - 1$ ดังนั้น $3 = 5^y \cdot 7^{y-2v}$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้

กรณีที่ 4.1.2 $y - v = v$ จากสมการ (14) จะได้ว่า

$$2 \cdot 7^k = 7^v (5^y - 1) \quad (16)$$

เนื่องจาก $5^y - 1 \equiv 1^y - 1 \equiv 0 \pmod{4}$ และทฤษฎีบท 1 ข้อ 5 จะได้ว่า $7^v (5^y - 1) \equiv 0 \pmod{4}$ เพราะฉะนั้นจากสมการ (16) จะได้ว่า $2 \cdot 7^k \equiv 0 \pmod{4}$ หรือ 4 หาร $2 \cdot 7^k$ ลงตัว ซึ่งเป็นไปไม่ได้

กรณีที่ 4.1.3 $y - v < v$ จากสมการ (14) จะได้ว่า

$$2 \cdot 7^k = 7^{y-v} (5^y - 7^{2v-y}) \quad (17)$$

จากสมการ (17) และ $\gcd(7^{y-v}, 5^y - 7^{2v-y}) = 1$ ดังนั้น $k = y - v$ และ

$$2 = 5^y - 7^{2v-y} \quad (18)$$

เนื่องจาก $5 \equiv -1 \pmod{3}$ และ $7 \equiv 1 \pmod{3}$ และจากทฤษฎีบท 1 ข้อ 4 และ 6 จะได้ว่า $5^y - 7^{2v-y} \equiv (-1)^y - 1 \pmod{3}$ และจาก y เป็นจำนวนคี่ ดังนั้น $5^y - 7^{2v-y} \equiv -2 \equiv 1 \pmod{3}$ และจากสมการ (18) จะได้ว่า $2 \equiv 1 \pmod{3}$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้

กรณี 4.2 $y - u = 0$ ดังนั้น $y = u$ และจากสมการ (13) จะได้ว่า

$$2 \cdot 7^k = 7^v (7^{y-2v} - 5^y) \quad (19)$$

จากสมการ (19) และ $\gcd(7^v, 7^{y-2v} - 5^y) = 1$ ดังนั้น $k = v$ และ

$$2 = 7^{y-x} - 5^y \quad (20)$$

สมมติว่า $y \geq 2$ จะได้ว่า $5^y \equiv 0 \pmod{25}$ ดังนั้นโดยสมการ (20) จะได้ว่า $2 \equiv 7^{y-x} \pmod{25}$ และจาก x เป็นจำนวนคู่ และ y เป็นจำนวนคี่ เพราะฉะนั้น $y - x$ เป็นจำนวนคี่ ดังนั้นจากทฤษฎีบท 4 จะได้ว่า $7^{y-x} \equiv 7 \pmod{25}$ หรือ $7^{y-x} \equiv 18 \pmod{25}$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เนื่องจาก $2 \equiv 7^{y-x} \pmod{25}$ เพราะฉะนั้น $y = 1$ นำไปแทนในสมการ (20) จะได้ว่า $2 = 7^{1-x} - 5$ หรือ $7 = 7^{1-x}$ ดังนั้น $x = 0$ นำไปแทนในสมการ (1) จะได้ว่า $z = 6$ นั่นคือ $(x, y, z) = (0, 1, 6)$

4. สรุปและอภิปรายผลการวิจัย

จากการดำเนินการวิจัยในหัวข้อที่ผ่านมา พบว่า สมการไอเฟนไทน์ $7^x + 35^y = z^2$ มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ (x, y, z) เพียงผลเฉลยเดียวเท่านั้น คือ $(0, 1, 6)$ ซึ่งในการหาผลเฉลยดังกล่าวใช้ความรู้พื้นฐานทางทฤษฎีจำนวน เช่น การหารลงตัว จำนวนเฉพาะ และสมภาค เป็นต้น นอกจากนี้สามารถนำวิธีการนี้ไปประยุกต์ใช้ในการหาผลเฉลยของสมการอื่นที่อยู่ในลักษณะคล้ายกันได้ สำหรับสิ่งที่น่าสนใจในการศึกษาต่อไป คือ การหาผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบของสมการไอเฟนไทน์ $7^x + n^y = z^2$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ

คำขอบคุณ

คณะผู้วิจัย ขอขอบคุณสถาบันวิจัยและพัฒนา คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเทพสตรีที่ให้การสนับสนุนการทำวิจัยในครั้งนี้

5. เอกสารอ้างอิง

- [1] Burton, D.M. (2010). Elementary number theory. 7th ed., New York: McGraw-Hill. p.p. 63-65.
- [2] Suvarnamani, A., Singta, A. and Chotchaisthit, S. (2011). On two Diophantine equations $4^x + 7^y = z^2$ and $4^x + 11^y = z^2$. Science and Technology RMUTT Journal, 1(1), p.p. 25-28.
- [3] Sroysang, B. (2013). On the Diophantine equation $7^x + 8^y = z^2$. International Journal of Pure and Applied Mathematics, 84(1), p.p. 111-114.

-
- [4] Sroysang, B. (2013). On the Diophantine equation $5^x + 7^y = z^2$. International Journal of Pure and Applied Mathematics, 89(1), p.p. 115-118.
- [5] Sroysang, B. (2014). On the Diophantine equation $7^x + 31^y = z^2$. International Journal of Pure and Applied Mathematics, 92(1), p.p. 109-112.
- [6] Sroysang, B. (2014). On two Diophantine equations $7^x + 19^y = z^2$ and $7^x + 91^y = z^2$. International Journal of Pure and Applied Mathematics, 92(1), p.p. 113-116.
- [7] Somanath, M., Kannan, J. and Raja, K. (2017). Exponential Diophantine equation in three variables $7^x + 7^{2y} = z^2$. International Journal of Engineering Research, 5(4), p.p. 91-93.
- [8] Rao, C.G. (2018). On the Diophantine equation $3^x + 7^y = z^2$. EPRA International Journal of Research and Development, 3(6), p.p. 93-95.
- [9] Gupta, S., Kumar, S. and Kishan, H. (2018). On the non-linear Diophantine equation $p^x + (p+6)^y = z^2$. Annals of Pure and Applied Mathematics, 18(1), p.p. 125-128.
- [10] Burshtein, N. (2019). On solutions to the Diophantine equation $7^x + 10^y = z^2$ when x, y, z are positive integers. Annals of Pure and Applied Mathematics, 20(2), p.p. 75-77.
- [11] Asthana, S. and Singh, M.M. (2019). On the Diophantine equation $2^x + 7^y = z^2$. International Journal of Research in Advent Technology, 7(5), p.p. 13-14.
- [12] Burshtein, N. (2020). On the Diophantine equations $2^x + 5^y = z^2$ and $7^x + 11^y = z^2$. Annals of Pure and Applied Mathematics, 21(1), p.p. 63-68.
- [13] Borah, P.B. and Dutta, M. (2022). On the Diophantine equation $7^x + 32^y = z^2$ and its generalization. Integers, 22, p.p. 1-5.
- [14] Pakapongpun, A. and Chattae, B. (2022). On the Diophantine equation $p^x + 7^y = z^2$, where p is prime and x, y, z are non-negative integers. International Journal of Mathematics and Computer Science, 17(4), p.p. 1535-1540.
- [15] Singh, P. (2024). A study on solution of two non-linear exponential Diophantine equations $11^x + 9^y = z^2$ and $7^x + 17^y = z^2$ in non-negative integer. GANITA, 74(2), p.p. 51-57.