

การประยุกต์ใช้โครงข่ายประสาทเทียมที่รับรู้ฟิสิกส์ (PINNs) เพื่อการจำลองการเคลื่อนที่ของน้ำในดินไม่อิ่มตัวตามสมการริชาร์ด

Application of Physics-Informed Neural Networks (PINNs) for Simulating Water Movement in Unsaturated Soils based on Richards' Equation

อัศรพล โคเหละ¹ และ เอกสิทธิ์ โสมิตสกุลชัย^{1*}
Akkarapol Kolaeh¹ and Ekasit Kositsakulchai^{1*}

Received 29 April 2026, Revised 22 June 2026, Accepted 6 July 2026

ABSTRACT

Understanding unsaturated soil water flow is essential for precision agriculture and water resources management. Traditional numerical methods for solving the Richards' equation often encounter instability at the wetting front and computational burdens due to grid discretization. This study evaluates the performance of Physics-Informed Neural Networks (PINNs) in simulating one-dimensional soil-water flow under irrigation conditions, using HYDRUS-1D data for loamy soil as a reference. The PINN architecture features four hidden layers with 64 neurons each, incorporating a sinusoidal activation function and a soft-clipping technique to enhance automatic differentiation efficiency and ensure mathematical stability near saturation limits. Results indicate exceptionally high performance, with a correlation coefficient (r) exceeding 0.99 and a Root Mean Square Difference below 0.004 for both training and testing datasets. The model accurately captured the highly non-linear movement of steep wetting fronts and daily irrigation-induced dynamics without numerical oscillations. Despite minor initial oscillations at $t = 0$, PINNs demonstrated a robust ability to learn physical laws and mass conservation. This research confirms the potential of PINNs as reliable surrogate models, offering a mesh-free alternative for analyzing soil water dynamics.

Keywords: Physics Informed Neural Networks (PINNs), Richards' Equation, Soil Water Dynamics, Deep Learning, Unsaturated Soil

บทคัดย่อ

ความเข้าใจพฤติกรรมน้ำในดินไม่อิ่มตัวเป็นพื้นฐานสำคัญสำหรับเกษตรกรแม่นยำและการจัดการทรัพยากรน้ำ วิธีเชิงตัวเลขแบบดั้งเดิมที่ใช้แก้สมการริชาร์ดมักประสบปัญหาความไม่เสถียรเชิงตัวเลขบริเวณแนวรุกของน้ำและข้อจำกัดในการกำหนดขนาดกริด การศึกษานี้จึงมุ่งประเมินสมรรถนะของโครงข่ายประสาทเทียมที่รับรู้ฟิสิกส์ (PINNs) ในการจำลองการไหลของน้ำในดินแบบหนึ่งมิติภายใต้สภาวะการให้น้ำชลประทาน โดยใช้ข้อมูลจากแบบจำลอง HYDRUS-1D สำหรับดินร่วนเป็นเกณฑ์อ้างอิง โครงสร้าง PINNs ประกอบด้วยชั้นซ่อน 4 ชั้น ชั้นละ 64 นิวรอน ร่วมกับการใช้ฟังก์ชันกระตุ้นแบบไซน์ (SIREN) และเทคนิค Soft-clipping เพื่อ

¹ภาควิชาวิศวกรรมชลประทาน คณะวิศวกรรมศาสตร์ กำแพงแสน มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ วิทยาเขตกำแพงแสน ต.กำแพงแสน อ.กำแพงแสน จ.นครปฐม 73140

Department of Irrigation Engineering, Faculty of Engineering at Kamphaeng Sean, Kasetsart University, KamphaengSaen Campus, Kamphaeng Saen, Kamphaeng Saen, Nakhon Pathom 73140, Thailand.

* Corresponding author: Tel: 0-3435-1897, E-mail address: ekasit.k@ku.ac.th

เพิ่มประสิทธิภาพการหาอนุพันธ์อัตโนมัติและป้องกันความผิดพลาดทางคณิตศาสตร์ ผลการศึกษาพบว่า PINNs มีความแม่นยำสูงมาก โดยมีค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ (r) มากกว่า 0.99 และค่า RMSD ต่ำกว่า 0.004 ทั้งในชุดข้อมูลฝึกสอนและทดสอบ แบบจำลองสามารถจับลักษณะการเคลื่อนที่ของแนวรุกของน้ำที่มีความชันสูงและการแปรผันตามรอบการให้น้ำรายวันได้อย่างเสถียรโดยไม่เกิดการแกว่งตัวเชิงตัวเลข แม้จะพบการแกว่งตัวเล็กน้อย เวลาเริ่มต้น ($t = 0$) แต่ PINNs แสดงให้เห็นถึงความสามารถในการเรียนรู้กฎทางฟิสิกส์และการอนุรักษ์มวลได้อย่างมีประสิทธิภาพ งานวิจัยนี้ยืนยันศักยภาพของ PINNs ในฐานะแบบจำลองตัวแทนที่เชื่อถือได้ ซึ่งช่วยก้าวข้ามข้อจำกัดของวิธีการแบบแบ่งกริดดั้งเดิมในการวิเคราะห์พลวัตน้ำในดิน

คำสำคัญ: โครงข่ายประสาทเทียมที่รับรู้ฟิสิกส์ สมการริชาร์ด พลศาสตร์น้ำในดิน การเรียนรู้เชิงลึก ดินไม่อิ่มตัว

บทนำ

พลวัตของน้ำในดินไม่อิ่มตัว โดยเฉพาะในบริเวณเขตรากพืช เป็นข้อมูลพื้นฐานสำคัญสำหรับการกำหนดการให้น้ำชลประทานและการวางแผนการจัดการน้ำในระบบเกษตรแม่นยำ (Vereecken *et al.*, 2016) สมการของริชาร์ดสัน-ริชาร์ด (Richardson-Richards Equation) (Richards, 1931; Richardson, 1922) หรือที่นิยมเรียกกันว่าสมการริชาร์ด (Richards' Equation) สามารถใช้อธิบายการเคลื่อนที่ของน้ำในดินไม่อิ่มตัวในเชิงคณิตศาสตร์ เพื่อวิเคราะห์การแปรผันของปริมาณน้ำในดินทั้งในมิติเวลาและพื้นที่ อย่างไรก็ตาม เนื่องจากสมการริชาร์ดมีความไม่เป็นเส้นตรงสูง การหาคำตอบเชิงวิเคราะห์ (Analytical Solution) จึงทำได้เฉพาะภายใต้สมมติฐานและเงื่อนไขขอบเขตที่เรียบง่ายเท่านั้น (Barry *et al.*, 1993; De Luca & Cepeda, 2016; Tracy, 2006) การหาคำตอบด้วยวิธีเชิงตัวเลข (Numerical Methods) จึงกลายเป็นเครื่องมือหลักในช่วงที่ผ่านมา (Farthing & Ogden, 2017; Zha *et al.*, 2019) อาทิ วิธีผลต่างจำกัด (Finite Difference Method) (Chávez-Negrete *et al.*, 2018) วิธีองค์ประกอบจำกัด (Finite Element Method) (Kamil *et al.*, 2024; List & Radu, 2016) หรือวิธีปริมาตรจำกัด (Finite Volume Method) (Eymard *et al.*, 1999; Lai & Ogden, 2015; Phankamolsil & Kositsakulchai, 2008) นอกจากนี้ ซอฟต์แวร์สำเร็จรูปอย่าง HYDRUS-1D (Šimůnek *et al.*, 2016) ยังเป็นเครื่องมือที่ได้รับความนิยมและเป็นที่ยอมรับอย่างกว้างขวางสำหรับการจำลองการเคลื่อนที่ของน้ำในดิน

แม้ว่าวิธีเชิงตัวเลขจะเป็นมาตรฐานสากล แต่การประยุกต์ใช้ในบางกรณีกลับพบข้อจำกัดบางประการ โดยเฉพาะความจำเป็นในการกำหนดกริด (Grid) ที่มีความละเอียดสูงเพื่อป้องกันปัญหาการแกว่งตัวเชิงตัวเลข (Numerical Oscillation) บริเวณแนวรุกของน้ำ (Wetting Front) ซึ่งมีผลต่อเสถียรภาพและมีการคำนวณเพิ่มขึ้นเมื่อต้องจำลองในพื้นที่บริเวณขนาดใหญ่ (Zha *et al.*, 2019) ในช่วงไม่กี่ปีที่ผ่านมา เทคโนโลยีการเรียนรู้เชิงลึก (Deep Learning) จึงได้เข้ามามีบทบาทสำคัญในการแก้สมการเชิงอนุพันธ์เพื่อก้าวข้ามข้อจำกัดด้านการคำนวณดังกล่าว อย่างไรก็ตาม โครงข่ายประสาทเทียมแบบดั้งเดิมที่ขับเคลื่อนด้วยข้อมูล แม้จะมีประสิทธิภาพสูง แต่ยังมีข้อจำกัดสำคัญด้านความสามารถในการตีความและไม่สามารถอธิบายผลลัพธ์ได้อย่างอิงกลไกทางฟิสิกส์ได้ ซึ่งมักถูกเปรียบเทียบกับเป็น “กล่องดำ” (Black Box) (Karniadakis *et al.*, 2021)

ด้วยเหตุนี้ เทคนิคโครงข่ายประสาทเทียมที่รับรู้ฟิสิกส์ (Physics-Informed Neural Networks, PINNs) จึงได้รับการพัฒนาขึ้นเพื่อบูรณาการจุดเด่นของทั้งสองศาสตร์เข้าด้วยกัน โดยมีการผนวกกฎทางฟิสิกส์เข้ากับฟังก์ชันสูญเสีย (Loss Function) (Chen *et al.*, 2023) โครงสร้างของ PINNs ได้รับการออกแบบให้ใช้ความสัมพันธ์ของอนุพันธ์ (Derivative) ในการประมวลผลผลลัพธ์ภายใต้การควบคุมของกฎเกณฑ์ทางฟิสิกส์ (Cuomo *et al.*, 2022; Raissi *et al.*, 2019) ซึ่งในการศึกษานี้คือสมการริชาร์ด แนวทางดังกล่าวไม่เพียงช่วยรักษาความถูกต้องทางฟิสิกส์ แต่ยังเป็นวิธีการแบบไร้กริด (Mesh-free) ที่ช่วยลด

ข้อจำกัดในการกำหนดขนาดกริดซึ่งเคยเป็นปัญหาหลักของวิธีเชิงตัวเลขแบบดั้งเดิม (Raissi *et al.*, 2019) การศึกษาวิจัยล่าสุดได้เริ่มประยุกต์ใช้ PINNs เพื่อประเมินปริมาณน้ำในดิน (Chavoshi *et al.*, 2025; Guan *et al.*, 2024) และจำลองลักษณะการไหลของน้ำในดิน (Bandai & Ghezzehei, 2022; Chen *et al.*, 2023; Patel & Yadav, 2026) ตลอดจนการประยุกต์ใช้ร่วมกับแบบจำลอง HYDRUS-1D (Li *et al.*, 2025) นอกจากนี้ PINNs ยังถูกนำมาใช้ในการหาคำตอบแบบย้อนกลับ (Inverse Solution) เพื่อประมาณค่าพารามิเตอร์ทางชลศาสตร์ของดินอย่างมีประสิทธิภาพ (Bandai & Ghezzehei, 2021; Depina *et al.*, 2022; Oikawa & Saito, 2024)

อย่างไรก็ตาม แม้ว่าเทคนิคดังกล่าวจะมีศักยภาพที่น่าสนใจ แต่การนำมาประยุกต์ใช้งานจริงยังมีประเด็นที่ต้องศึกษาเพิ่มเติม การศึกษานี้จึงมีเป้าหมายที่จะประยุกต์ใช้ PINNs เพื่อหาคำตอบของสมการริชาร์ดภายใต้สภาวะที่มีการให้น้ำชลประทานและประเมินประสิทธิภาพในการหาคำตอบเมื่อเปรียบเทียบกับวิธีเชิงตัวเลขที่ใช้ในแบบจำลองมาตรฐานปัจจุบัน โดยมีวัตถุประสงค์ดังนี้ (1) ประเมินสมรรถนะของ PINNs ในการจำลองการไหลของน้ำในดินไม่อิ่มตัว และ (2) เปรียบเทียบผลการจำลองกับวิธีเชิงตัวเลขจากแบบจำลอง HYDRUS-1D ทั้งนี้ เพื่อใช้เป็นแนวทางในการพัฒนาเครื่องมือสำหรับวิเคราะห์และจำลองสถานการณ์น้ำในดินที่ประมวลผลได้อย่างรวดเร็วและมีความน่าเชื่อถือ เพื่อสนับสนุนการจัดการน้ำชลประทานในลำดับต่อไป

อุปกรณ์และวิธีการ

สมการริชาร์ด

การจำลองพลวัตการไหลของน้ำในดินไม่อิ่มตัวในการศึกษานี้ อ้างอิงตามสมการริชาร์ดซึ่งเป็นการบูรณาการกฎของบัคกิงแฮม-ดาร์ซี (Buckingham-Darcy Law) เข้ากับสมการความต่อเนื่อง (Continuity Equation) (Farthing & Ogden, 2017) เพื่ออธิบายการแปรผันของปริมาณน้ำในดินทั้งในมิติเวลาและพื้นที่ โดยสมการริชาร์ดในรูปแบบผสม

(Mixed-form Richards' Equation) สำหรับการไหลในหนึ่งมิติแสดงได้ดังสมการที่ (1)

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z} \left[K(\theta) \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} + 1 \right) \right] \quad (1)$$

โดยที่ θ คือความชื้นโดยปริมาตร (Volumetric Water Content) เป็นหน่วยเป็นปริมาตรน้ำต่อปริมาตรรวม (ลบ.ซม./ลบ.ซม.), t คือเวลา (ซม.), z คือความลึกของดิน (ซม.) โดยกำหนดให้ทิศทางลบคือทิศทางที่ลึกลงไป, ψ คือ ศักย์เมทริกในหน่วยความลึกน้ำ (Matric Potential, ซม.), และ K คือการนำน้ำของดิน (Hydraulic Conductivity, ซม./ซม.)

เพื่อให้สมการข้างต้นสามารถหาคำตอบได้ จำเป็นต้องใช้แบบจำลองคุณสมบัติทางชลศาสตร์ของดิน (Soil Hydraulic Constitutive Relationships) การศึกษานี้เลือกใช้สมการของ van Genuchten (1980) ดังสมการที่ (2)

$$\theta(\psi) = \theta_r + \frac{\theta_s - \theta_r}{[1 + (\alpha|\psi|)^n]^m} \quad (2)$$

เมื่อ θ_r คือความชื้นตกค้าง (Residual Water Content), θ_s คือความชื้นอิ่มตัว (Saturated Water Content), α คือพารามิเตอร์ที่เกี่ยวข้องกับขนาดรูพรุน (1/ซม.) และ n คือพารามิเตอร์การกระจายตัวของขนาดรูพรุน โดยที่ $m = 1 - 1/n$

สำหรับค่าการนำน้ำของดินคำนวณจากระดับความอิ่มตัวประสิทธิผล (Effective Saturation, S_e) โดยมีนิยามคือ $S_e = (\theta - \theta_r) / (\theta_s - \theta_r)$ ดังสมการที่ (3)

$$K(\theta) = K_s S_e^l \left[1 - \left(1 - S_e^{1/m} \right)^m \right]^2 \quad (3)$$

โดยที่ K_s คือ ค่าการนำน้ำอิ่มตัวของดิน (Saturated Hydraulic Conductivity, ซม./ซม.) และ l คือพารามิเตอร์การเชื่อมต่อของรูพรุน (Pore-Connectivity Parameter)

แบบจำลองโครงข่ายประสาทเทียมที่รับรู้ฟิสิกส์

โครงสร้างของแบบจำลองโครงข่ายประสาทเทียมที่รับรู้ฟิสิกส์ (Physics-Informed Neural Networks; PINNs) ได้รับการออกแบบให้เป็น

โครงข่ายแบบเชื่อมตอสสมบูรณ์ (Fully Connected Neural Network) เพื่อทำหน้าที่เป็นตัวประมาณค่าฟังก์ชันสากล (Universal Function Approximator)

สำหรับการหาคำตอบของสมการรีซาร์ด โครงข่ายรับตัวแปรอิสระ 2 ค่าผ่านชั้นนำเข้า (Input Layer) ได้แก่ ความลึก (z) และเวลา (t) เพื่อให้แบบจำลองสามารถคำนวณค่าความชันดิน (θ) ณ ตำแหน่งความลึกและเวลาที่ระบุได้โดยตรง ผ่านชั้นส่งออก (Output Layer) ซึ่งสามารถเขียนให้อยู่ในรูปฟังก์ชัน $\theta(z, t; W, b)$ โดยที่ W และ b คือค่าน้ำหนัก (Weight) และค่าไบอัส (Bias) ตามลำดับ โครงข่ายประกอบด้วยชั้นซ่อน (Hidden Layer) จำนวน 4 ชั้น โดยแต่ละชั้นมีจำนวนนิวรอน 64 ตัว โครงสร้างดังกล่าวมีความเพียงพอต่อการเรียนรู้พฤติกรรมความไม่เป็นเส้นตรงของการไหลของน้ำในดิน และสอดคล้องกับแนวทางการออกแบบโครงข่ายเพื่อลดความเสี่ยงในการเกิดปัญหาการเรียนรู้มากเกินไป (Overfitting) (Raissi *et al.*, 2019)

สำหรับฟังก์ชันกระตุ้น (Activation Function) การศึกษานี้เลือกใช้ฟังก์ชันแบบไซน์ (Sine Function) หรือที่รู้จักในรูปแบบโครงข่ายการแทนที่ด้วยสัญญาณไซน์ (Sinusoidal Representation Networks; SIREN) (Sitzmann *et al.*, 2020) เนื่องจาก สมบัติทางชลศาสตร์ของดินมีความอ่อนไหวสูงต่อการเปลี่ยนแปลงความชื้นเมื่อเข้าใกล้จุดอิ่มตัว (θ_s) และจุดความชื้นตกค้าง (θ_r) การศึกษานี้จึงได้ประยุกต์ใช้เทคนิคการจำกัดขอบเขต (Soft-clipping) ผ่านฟังก์ชันซิกมอยด์ (Sigmoid Function) เพื่อควบคุมระดับความอิ่มตัวประสิทธิผล (S_e) ให้อยู่ในช่วงที่ปลอดภัยทางคณิตศาสตร์ (0.001 ถึง 0.999) เทคนิคดังกล่าวมีบทบาทสำคัญในการป้องกันปัญหาตัวส่วนเป็นศูนย์และช่วยให้ค่าเกรเดียนต์สามารถส่งผ่านได้อย่างต่อเนื่องโดยไม่เกิดค่าผิดปกติทางคณิตศาสตร์ ในระหว่างกระบวนการแพร่ย้อนกลับ (Backpropagation) (Bandai & Ghezzehei, 2022; Goodfellow *et al.*, 2016)

ทั้งนี้ แบบจำลอง PINNs พัฒนาขึ้นบนโปรแกรม MATLAB R2025b ร่วมกับ Deep Learning Toolbox (MathWorks, 2025) การเลือกใช้ซอฟต์แวร์

ดังกล่าวช่วยให้สามารถจัดการการคำนวณรูปแบบอาร์เรย์และการหาอนุพันธ์อัตโนมัติ (Automatic Differentiation) ได้อย่างมีประสิทธิภาพ ซึ่งกระบวนการหาอนุพันธ์อัตโนมัตินี้มีความจำเป็นอย่างยิ่งสำหรับการคำนวณเศษเหลือ (Residual) ของสมการรีซาร์ดที่มีความซับซ้อนสูง เนื่องจากสามารถคำนวณค่าอนุพันธ์ได้อย่างแม่นยำตามหลักคณิตศาสตร์โดยปราศจากความคลาดเคลื่อนจากการตัดทอน (Truncation Error) ที่มักพบในวิธีเชิงตัวเลขแบบดั้งเดิม (Baydin *et al.*, 2018; Raissi *et al.*, 2019)

ฟังก์ชันสูญเสีย

ฟังก์ชันสูญเสีย (Loss Function) ถือเป็นกลไกสำคัญของ PINNs ที่ทำหน้าที่ควบคุมให้ผลลัพธ์สอดคล้องกับทั้งกฎทางฟิสิกส์และข้อมูลอ้างอิง โดยค่าความสูญเสียรวม (L_{total}) เป็นผลรวมถ่วงน้ำหนักของค่าความคลาดเคลื่อนจากสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (L_{PDE}) และค่าความคลาดเคลื่อนจากข้อมูลอ้างอิง (L_{data}) ดังสมการที่ (4)

$$L_{total} = \lambda_{PDE} L_{PDE} + \lambda_{data} L_{data} \quad (4)$$

โดย λ_{PDE} และ λ_{data} คือ ค่าถ่วงน้ำหนักของความคลาดเคลื่อนจากสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยและจากข้อมูลอ้างอิง ตามลำดับ

ความคลาดเคลื่อนจากสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (L_{PDE}) คำนวณจากค่าเฉลี่ยของเศษเหลือกำลังสอง (f^2) ดังสมการที่ (5)

$$L_{PDE} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f^2 \quad (5)$$

สำหรับสมการรีซาร์ด เศษเหลือ (f) คำนวณจาก $f = \partial\theta/\partial t + \partial q/\partial z$ โดยที่ $q = -K(\theta)(\partial\psi/\partial z + 1)$ เมื่อแทนลงในสมการที่ (5) จะได้ฟังก์ชันสูญเสียสำหรับค่าความคลาดเคลื่อนจากสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (L_{PDE}) ดังแสดงในสมการที่ (6)

$$L_{PDE} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial\theta}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} \left[K(\theta) \left(\frac{\partial\psi}{\partial z} + 1 \right) \right] \right)^2 \quad (6)$$

ความคลาดเคลื่อนจากข้อมูลอ้างอิง (L_{data}) เป็นค่าเฉลี่ยของผลต่างกำลังสองของค่าที่ทำนายกับค่าอ้างอิง ดังสมการที่ (7)

$$\mathcal{L}_{Data} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\theta_{pred}^{(i)} - \theta_{target}^{(i)})^2 \quad (7)$$

โดยที่ θ_{pred} เป็นข้อมูลปริมาณน้ำในดินอ้างอิงจากทำนายโดย PINNs, θ_{target} เป็นข้อมูลปริมาณน้ำในดินอ้างอิงจาก HYDRUS และ N เป็นจำนวนจุดข้อมูล

กระบวนการฝึกสอน

การปรับปรุงค่าน้ำหนัก (W) และค่าไบอัส (b) ของโครงข่ายดำเนินการโดยใช้อัลกอริทึมอดัม (Adaptive Moment Estimation, ADAM) (Kingma & Ba, 2014) เนื่องจากมีประสิทธิภาพในการปรับอัตราการเรียนรู้ (Learning Rate) แบบแปรผันและสามารถลู่เข้าหาคำตอบได้อย่างรวดเร็ว (Raissi *et al.*, 2019) การศึกษานี้กำหนดอัตราการเรียนรู้เริ่มต้นที่ 0.001 และกำหนดจำนวนรอบการฝึกสอน (Epochs) สูงสุดไว้ที่ 10,000 รอบ นอกจากนี้ ระบบได้ทำการบันทึกและคัดเลือกแบบจำลอง PINNs ในรอบที่มีค่าความคลาดเคลื่อนรวมต่ำที่สุดเพื่อนำไปใช้ในขั้นตอนการทดสอบ

การสร้างชุดข้อมูลอ้างอิงด้วยแบบจำลอง HYDRUS

เพื่อให้ได้ชุดข้อมูลที่มีความน่าเชื่อถือสำหรับการฝึกสอนและประเมินผลโครงข่ายประสาทเทียมที่รับรู้ฟิสิกส์ การศึกษานี้ได้ใช้แบบจำลอง HYDRUS-1D version 4.17 (Šimůnek *et al.*, 2018) ซึ่งเป็นซอฟต์แวร์มาตรฐานในการจำลองการเคลื่อนที่ของน้ำในดินแบบหนึ่งมิติ โดยกำหนดให้แบบจำลองวิเคราะห์การไหลของน้ำผ่านแท่งดินลึก 100 ซม. ในแนวตั้ง เนื้อดินที่ใช้ในการจำลองคือดินร่วน (Loamy Soil) ซึ่งมีสมบัติทางชลศาสตร์อ้างอิงตามบัญชีข้อมูลดิน (Soil Catalog) (Radcliffe & Šimunek, 2010; Yingjajaval, 1993) ประกอบด้วยค่าพารามิเตอร์ ดังนี้ $\theta_r = 0.078$, $\theta_s = 0.43$, $\alpha = 0.036$ 1/ซม., $n = 1.56$, $K_s = 1.04$ ซม./ซม. และ $l = 0.5$

เงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions, BCs) กำหนดให้ขอบเขตด้านบนเป็นแบบฟลักซ์ หรือ Neumann BC (Radcliffe & Šimunek, 2010) เพื่อจำลองสถานการณ์การให้น้ำชลประทานในอัตรา 0.5 ซม./ซม. เป็นประจำทุกวันในช่วงเวลา 6.00 – 8.00 น.

โดยไม่มีการระเหยน้ำ ส่วนขอบเขตด้านล่าง (Lower BC) กำหนดให้เป็นการระบายน้ำอิสระ (Free Drainage) สำหรับเงื่อนไขเริ่มต้น (Initial Condition) กำหนดให้ดินมีความชื้นสม่ำเสมอตลอดความลึกที่ระดับความจุความชื้นสนาม (Field Capacity) ซึ่งสอดคล้องกับค่าศักย์เมทริก (ψ) ที่ -330 ซม.

แบบจำลองดำเนินการคำนวณในช่วงเวลารวมทั้งสิ้น 240 ซม. โดยบันทึกค่าความชื้นดินที่ระดับความลึกทุกระยะ 1 ซม. และบันทึกข้อมูลผลลัพธ์ทุกช่วงเวลา 1 ซม. ข้อมูลที่ได้จาก HYDRUS ถูกแบ่งออกเป็น 2 ส่วน ได้แก่ ชุดข้อมูลฝึกสอน (Training Dataset) ซึ่งคัดเลือกข้อมูลที่ระดับความลึกเลขคู่ ($z = 0, 2, 4, \dots, 100$ ซม.) เพื่อใช้สำหรับคำนวณในฟังก์ชันสูญเสียจากข้อมูล และชุดข้อมูลทดสอบ (Testing Dataset) ซึ่งคัดเลือกข้อมูลที่ระดับความลึกเลขคี่ ($z = 1, 3, 5, \dots, 99$ ซม.) เพื่อใช้ในการประเมินสมรรถนะของแบบจำลองที่พัฒนาขึ้น

การประเมินสมรรถนะของแบบจำลอง

เพื่อประเมินความแม่นยำและประสิทธิภาพของแบบจำลอง PINNs ในการเรียนรู้และทำนายความชื้นดินเมื่อเปรียบเทียบกับข้อมูลอ้างอิงจากแบบจำลอง HYDRUS การศึกษานี้ได้เลือกใช้ดัชนีทางสถิติ 2 ตัวชี้วัด ได้แก่ รากที่สองของความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (Root Mean Square Difference; RMSD) ซึ่งเป็นตัวชี้วัดสากลที่ใช้ในการประเมินความคลาดเคลื่อนรวมของแบบจำลอง (Chai & Draxler, 2014) ดังแสดงในสมการที่ (8) และสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ของเพียร์สัน (Pearson's Correlation Coefficient, r) (Moriasi *et al.*, 2007) สำหรับประเมินระดับความสอดคล้องเชิงเส้นระหว่างผลการทำนายและข้อมูลอ้างอิง ดังสมการที่ (9)

$$RMSD = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\theta_i^{obs} - \theta_i^{sim})^2} \quad (8)$$

$$r = \frac{\sum_{i=1}^N (\theta_i^{obs} - \bar{\theta}^{obs})(\theta_i^{sim} - \bar{\theta}^{sim})}{\sqrt{\sum_{i=1}^N (\theta_i^{obs} - \bar{\theta}^{obs})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^N (\theta_i^{sim} - \bar{\theta}^{sim})^2}} \quad (9)$$

เมื่อ θ_i^{obs} คือค่าความชื้นดินที่ได้จากแบบจำลอง HYDRUS (ค่าอ้างอิง), θ_i^{sim} คือค่าความชื้นดินที่ได้

จากแบบจำลอง PINNs (ค่าทำนาย), $\bar{\theta}^{obs}$ และ $\bar{\theta}^{sim}$ คือค่าเฉลี่ยของความชื้นดินจากแบบจำลอง HYDRUS และ PINNs ตามลำดับ และ N คือจำนวนข้อมูลทั้งหมดที่ใช้ในการประเมิน

ผล

สมรรถนะของแบบจำลอง

ผลการประเมินสมรรถนะของแบบจำลอง PINNs เมื่อเปรียบเทียบกับผลการคำนวณจากแบบจำลอง HYDRUS (Figure 1) พบว่าผลการ

ทำนายมีความสอดคล้องกับข้อมูลอ้างอิงในระดับที่สูงมาก โดยมีค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ (r) เท่ากับ 0.9989 และ 0.9992 สำหรับชุดข้อมูลฝึกสอนและชุดข้อมูลทดสอบ ตามลำดับ นอกจากนี้ แบบจำลองยังแสดงความแตกต่างเฉลี่ยในระดับที่ต่ำมาก ซึ่งพิจารณาได้จากค่ารากที่สองของความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (RMSD) ที่มีค่าเพียง 0.0033 สำหรับชุดข้อมูลฝึกสอน และ 0.0029 สำหรับชุดข้อมูลทดสอบ

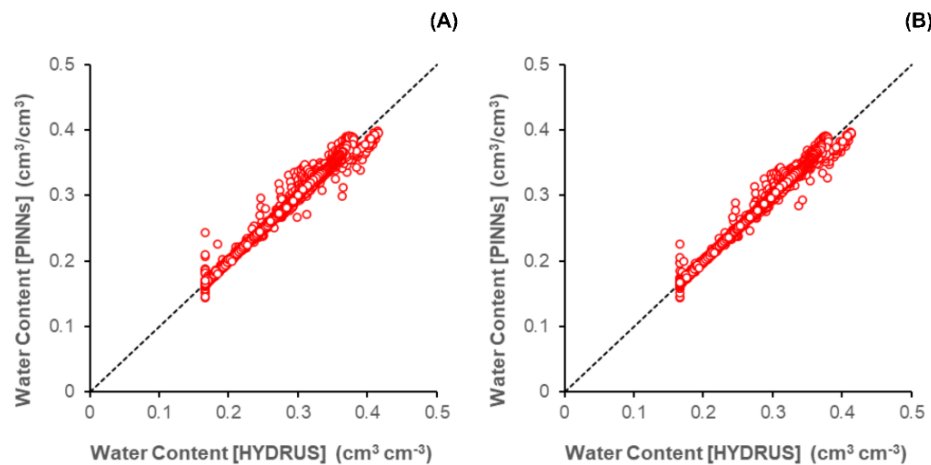


Figure 1 Comparison of soil water content calculated by HYDRUS and PINNs for (A) training dataset and (B) testing dataset

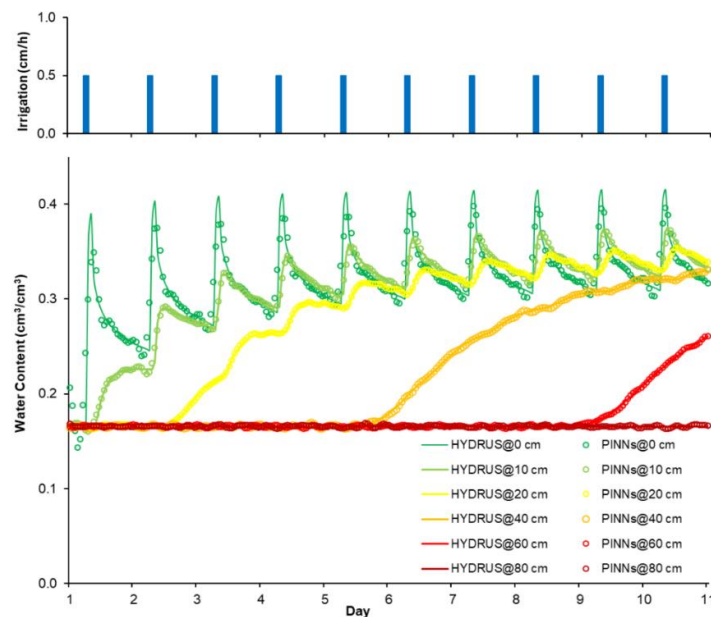


Figure 2 Comparison of soil moisture time series at various depths between HYDRUS and PINNs

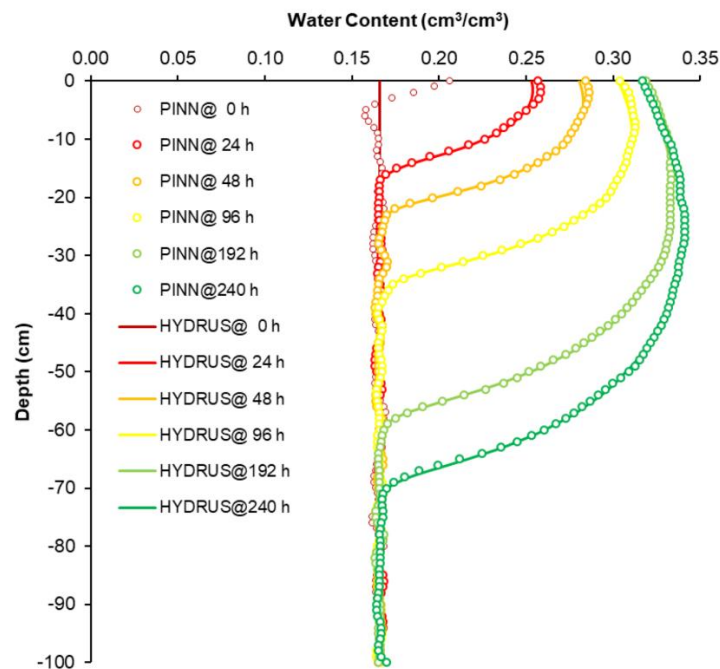


Figure 3 Soil water movement profiles at various time steps over a depth of 0–100 cm, showing the comparison between HYDRUS and PINNs

การแปรผันของความชื้นดินตามเวลา

ผลการจำลองการแปรผันของความชื้นดินตามเวลาในระดับความลึกต่าง ๆ แสดงให้เห็นถึงความสอดคล้องกันระหว่างแบบจำลอง PINNs และ HYDRUS (Figure 2) โดยที่ระดับผิวดิน (0 ซม., เส้นสีเขียวเข้ม) ความชื้นดินแสดงลักษณะกราฟแบบฟันปลาซึ่งตอบสนองอย่างฉับพลันต่อการให้น้ำชลประทานเป็นเวลา 2 ชั่วโมงในช่วงเช้าของทุกวัน โดยความชื้นจะเพิ่มขึ้นสู่ระดับสูงสุดและลดลงอย่างรวดเร็วเมื่อสิ้นสุดการให้น้ำ สำหรับที่ระดับความลึก 10 ซม. (เส้นสีเขียวอ่อน) ยังคงปรากฏลักษณะการเพิ่มขึ้นตามรอบการให้น้ำแต่มีค่าการเปลี่ยนแปลงที่น้อยกว่าระดับผิวดิน

ในระดับที่ลึกลงไป พฤติกรรมความชื้นดินเริ่มแสดงปรากฏการณ์หน่วงเวลา และมีลักษณะกราฟที่ราบเรียบขึ้นเนื่องจากน้ำต้องใช้เวลาในการเคลื่อนที่ผ่านช่องว่างระหว่างเม็ดดิน โดยที่ระดับความลึก 20 ซม. (เส้นสีเหลือง) ความชื้นเริ่มมีการเปลี่ยนแปลงหลังจากวันที่ 2 ของการจำลอง และตอบสนองต่อการให้น้ำเพียงเล็กน้อย ที่ระดับ 40 ซม. (เส้นสีส้ม) ความชื้นเริ่มเพิ่มขึ้นหลังจากวันที่ 5 โดย

ไม่แสดงการแปรผันตามรอบการให้น้ำรายวัน แต่เป็นการเพิ่มขึ้นแบบสะสมอย่างต่อเนื่อง เช่นเดียวกับที่ระดับ 60 ซม. (เส้นสีแดง) ซึ่งเริ่มมีการเปลี่ยนแปลงหลังจากวันที่ 8 ส่วนในระดับความลึกที่มากกว่า 80 ซม. (เส้นสีแดงเข้ม) ปริมาณน้ำในดินมีการเปลี่ยนแปลงเพียงเล็กน้อยตลอดช่วงเวลากำหนด แบบจำลอง PINNs สามารถจับลักษณะการเพิ่มขึ้นของความชื้นอย่างรวดเร็วและการลดลงอย่างค่อยเป็นค่อยไปได้ อย่างแม่นยำ

ลักษณะหน้าตัดการเคลื่อนที่ของน้ำในดิน

Figure 3 แสดงลักษณะหน้าตัดการเคลื่อนที่ของน้ำในดิน ณ ช่วงเวลากำหนดต่าง ๆ ตลอดความลึก 0-100 ซม. พบว่าผลลัพธ์จากแบบจำลอง PINNs (จุดกลม) และ HYDRUS (เส้นทึบ) สอดคล้องกันเป็นอย่างดีในเกือบทุกช่วงเวลา อย่างไรก็ตาม เวลาเริ่มต้น ($t = 0$ ซม.) แบบจำลอง PINNs แสดงการแกว่งตัวของค่าความชื้นเมื่อเทียบกับเงื่อนไขเริ่มต้น (Initial Condition) ก่อนข้างสูง แต่เมื่อเวลาผ่านไปถึง 24 ซม. การแกว่งตัวดังกล่าวได้ลดลงและเริ่มเห็นแนวรุกของน้ำเคลื่อนที่ลงไปจนถึงระดับความลึก 20 ซม. จากนั้นแนวรุกของน้ำได้ซึมลึกลงไปยัง

ต่อเนื่อง โดยใช้เวลา 48 ชม. และ 96 ชม. ความชื้นแผ่ขยายลงไปถึงระดับประมาณ 25 ซม. และ 40 ซม. ตามลำดับ เมื่อเข้าสู่ช่วงท้ายของการจำลองที่เวลา 192 ชม. ความชื้นเพิ่มขึ้นจนถึงระดับ 60 ซม. และ ณ เวลาสิ้นสุดการจำลองที่ 240 ชม. น้ำได้ซึมผ่านระดับ 70 ซม. ลงไปแต่ยังไม่ถึงระดับความลึก 80 ซม.

วิจารณ์

แบบจำลอง PINNs สามารถเรียนรู้และทำนายพลวัตการไหลของน้ำในดินไม่อึดตัวได้แม่นยำ โดยมีค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ (r) มากกว่า 0.99 และค่าความคลาดเคลื่อน RMSD ต่ำกว่า 0.004 ทั้งในชุดข้อมูลฝึกสอนและชุดข้อมูลทดสอบ การประเมินด้วยชุดข้อมูลทดสอบซึ่งแบบจำลองไม่เคยได้รับการประมวลผลมาก่อน เป็นการยืนยันว่า PINNs มิได้เกิดปัญหาการเรียนรู้มากเกินไป (Overfitting) และแสดงศักยภาพในการเป็นแบบจำลองตัวแทน (Surrogate Model) ที่ประมวลผลสอดคล้องกับผลลัพธ์จาก HYDRUS ภายใต้สภาวะขอบเขตที่ถูกกำหนด ผลลัพธ์ดังกล่าวเป็นการยืนยันเชิงประจักษ์ถึงแนวคิดของ Raissi *et al.* (2019) ว่าการผนวกสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเข้าเป็นส่วนหนึ่งของฟังก์ชันสูญเสียช่วยให้โครงข่ายประสาทเทียมสามารถคำนวณพฤติกรรมทางกายภาพได้จริง

ความสำเร็จในการจัดการความไม่เป็นเส้นตรงของสมการรีซาร์ดในการศึกษานี้ เป็นผลจากการเลือกใช้ฟังก์ชันกระตุ้นแบบไซน์ (SIREN) ซึ่งสอดคล้องกับข้อเสนอนี้ของ Sitzmann *et al.* (2020) ที่ระบุว่าฟังก์ชันดังกล่าวเหมาะสมในการรักษาข้อมูลของอนุพันธ์ลำดับสูง ทำให้กระบวนการหาอนุพันธ์อัตโนมัติในฟังก์ชันสูญเสียมีความต่อเนื่องและราบเรียบ นอกจากนี้ การประยุกต์ใช้เทคนิค Soft-clipping เป็นกลไกที่ช่วยควบคุมระดับความอึดตัวประสิทธิผล (S_e) ไม่ให้หลุดขอบเขตจนนำไปสู่ความผิดพลาดทางคณิตศาสตร์ ซึ่งเป็นปัญหาทางเทคนิคที่พบเมื่อต้องรวมพารามิเตอร์ทางชลศาสตร์ของดินที่มีความไวสูงเข้ากับการฝึกสอนโครงข่ายประสาทเทียม สำหรับด้านภาระการคำนวณกระบวนการฝึกสอนแบบจำลอง (Training) ของ

PINNs ใช้เวลาประมวลผลนานกว่าการคำนวณด้วยวิธีเชิงตัวเลขในแบบจำลอง HYDRUS-1D แต่เมื่อการฝึกสอนสมบูรณ์แบบจำลองจะทำนายผลลัพธ์ได้รวดเร็วกว่า ซึ่งเป็นข้อได้เปรียบเมื่อนำไปประยุกต์ใช้ในพื้นที่ขนาดใหญ่

อย่างไรก็ตาม การแกว่งตัวของค่าความชื้นที่พบในช่วงเริ่มต้นของการจำลอง ($t = 0$ ชม.) เกิดจากการที่โครงสร้างของแบบจำลองในการศึกษานี้ยังไม่ได้กำหนดฟังก์ชันสูญเสียสำหรับเงื่อนไขเริ่มต้น (Initial Loss) ไว้อย่างเจาะจง ดังนั้น เพื่อเพิ่มเสถียรภาพของการจำลองในช่วงเริ่มต้น งานวิจัยในระยะต่อไปจึงควรพิจารณาเพิ่มส่วนของความคลาดเคลื่อนจากเงื่อนไขเริ่มต้นและเงื่อนไขขอบเขตเข้าไปในฟังก์ชันสูญเสียโดยตรง ควบคู่กับการใช้เทคนิคการปรับค่าน้ำหนักแบบปรับตัว (Adaptive Weighting) แม้จะมีข้อจำกัดดังกล่าว แต่ระดับความแม่นยำโดยรวมชี้ให้เห็นอย่างชัดเจนว่า PINNs มีศักยภาพพร้อมที่จะถูกพัฒนาเป็นแบบจำลองตัวแทน (Surrogate Model) ที่เชื่อถือได้

แม้การศึกษานี้จะจำกัดอยู่ในปัญหาแบบไปข้างหน้า (Forward Problem) ในสภาวะดินเนื้อเดียว แต่ความสามารถในการเรียนรู้กฎการอนุรักษ์มวลจะเป็นรากฐานสำคัญสำหรับการต่อยอดไปสู่การแก้ปัญหาแบบย้อนกลับ (Inverse Problem) เพื่อประมาณค่าพารามิเตอร์ดินจากข้อมูลภาคสนามที่มีจำกัด (Bandai & Ghezzehei, 2021) และช่วยลดข้อจำกัดของแบบจำลองที่ขับเคลื่อนด้วยข้อมูลเพียงอย่างเดียว (Song *et al.*, 2022)

สำหรับแนวทางการวิจัยต่อไป ควรขยายขอบเขตการจำลองให้ครอบคลุมพลวัตตามธรรมชาติที่ซับซ้อนขึ้น เช่น การเพิ่มเงื่อนไขขอบเขตบน (Upper BC) กรณีที่มีการระเหยน้ำจากผิวดิน สภาวะฝนตกต่อเนื่อง และการทดสอบกับชั้นดินที่มีความไม่สม่ำเสมอ (Heterogeneous Soil) การนำแบบจำลอง PINNs ไปประยุกต์ใช้ในสภาพแวดล้อมหรือเงื่อนไขขอบเขตอื่นจำเป็นต้องมีการฝึกสอนแบบจำลองใหม่ (Retraining) หรือปรับโครงสร้างให้รองรับเงื่อนไขที่เปลี่ยนแปลงไป ทั้งนี้ สามารถนำหลักการเรียนรู้แบบถ่ายโอน (Transfer Learning) มาประยุกต์ใช้เพื่อลด

ระยะเวลาการฝึกสอนเมื่อเทียบกับการฝึกสอนครั้งแรก แนวทางเหล่านี้ช่วยเพิ่มขีดความสามารถของแบบจำลองในการสนับสนุนการจัดการน้ำชลประทานในสถานะจริง

โดยสรุป การศึกษานี้พิสูจน์ให้เห็นว่าโครงข่ายประสาทเทียมที่รับรู้ฟิสิกส์ (PINNs) สามารถจำลองการไหลของน้ำในดินไม่อิ่มตัวภายใต้สภาวะการให้น้ำชลประทานได้อย่างแม่นยำและมีเสถียรภาพเทียบเท่ากับแบบจำลองมาตรฐานอย่าง Hydrus-1D การบูรณาการกฎทางฟิสิกส์เข้ากับเทคนิคการเรียนรู้เชิงลึกแบบไร้กริดทำให้ PINNs เป็นเครื่องมือที่ทรงประสิทธิภาพในการวิเคราะห์พลวัตน้ำในดิน อันจะเป็นประโยชน์อย่างยิ่งต่อการยกระดับการจัดการทรัพยากรน้ำในระบบเกษตรแม่นยำ

คำขอบคุณ

งานวิจัยนี้ได้รับการสนับสนุนจากคณะวิศวกรรมศาสตร์ กำแพงแสน มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ และคณะผู้วิจัยขอขอบคุณกลุ่มผู้พัฒนาโปรแกรม HYDRUS-1D ที่ใช้ในการศึกษานี้

เอกสารอ้างอิง

- Bandai, T., & Ghezzehei, T. A. (2021). Physics-informed neural networks with monotonicity constraints for Richardson-Richards equation: Estimation of constitutive relationships and soil water flux density from volumetric water content measurements. *Water Resources Research*, 57(2). <https://doi.org/10.1029/2020wr027642>
- Bandai, T., & Ghezzehei, T. A. (2022). Forward and inverse modeling of water flow in unsaturated soils with discontinuous hydraulic conductivities using physics-informed neural networks with domain decomposition. *Hydrology and Earth System Sciences*, 26(16), 4469–4495. <https://doi.org/10.5194/hess-26-4469-2022>
- Barry, D. A., Parlange, J. Y., Sander, G. C., & Sivaplan, M. (1993). A class of exact solutions for Richards' equation. *Journal of Hydrology*, 142(1), 29–46. [https://doi.org/10.1016/0022-1694\(93\)90003-R](https://doi.org/10.1016/0022-1694(93)90003-R)
- Baydin, A. G., Pearlmutter, B. A., Radul, A. A., & Siskind, J. M. (2018). Automatic differentiation in machine learning: a survey. *Journal of Machine Learning Research*, 18(153), 1–43. <http://jmlr.org/papers/v18/17-468.html>
- Chai, T., & Draxler, R. R. (2014). Root mean square error (RMSE) or mean absolute error (MAE)?—Arguments against avoiding RMSE in the literature. *Geoscientific Model Development*, 7(3), 1247–1250. <https://doi.org/10.5194/gmd-7-1247-2014>
- Chávez-Negrete, C., Domínguez-Mota, F. J., & Santana-Quinteros, D. (2018). Numerical solution of Richards' equation of water flow by generalized finite differences. *Computers and Geotechnics*, 101, 168–175. <https://doi.org/10.1016/j.compgeo.2018.05.003>
- Chavoshi, A., Dashtian, H., Bakhshian, S., Young, M. H., & Niyogi, D. (2025). PINN-SM: A physics-informed neural networks model for vadose zone soil moisture profile prediction. *Journal of Geophysical Research: Machine Learning and Computation*, 2(4). <https://doi.org/10.1029/2024jh000547>

- Chen, Y., Xu, Y., Wang, L., & Li, T. (2023). Modeling water flow in unsaturated soils through physics-informed neural network with principled loss function. *Computers and Geotechnics*, 161, 105546. <https://doi.org/10.1016/j.compgeo.2023.105546>
- Cuomo, S., Di Cola, V. S., Giampaolo, F., Rozza, G., Raissi, M., & Piccialli, F. (2022). Scientific machine learning through physics-informed neural networks: Where we are and what's next. *Journal of Scientific Computing*, 92(3), 88. <https://doi.org/10.1007/s10915-022-01939-z>
- De Luca, D. L., & Cepeda, J. M. (2016). Procedure to obtain analytical solutions of one-dimensional Richards' equation for infiltration in two-layered soils. *Journal of Hydrologic Engineering*, 21(7). [https://doi.org/10.1061/\(asce\)he.1943-5584.0001356](https://doi.org/10.1061/(asce)he.1943-5584.0001356)
- Depina, I., Jain, S., Mar Valsson, S., & Gotovac, H. (2022). Application of physics-informed neural networks to inverse problems in unsaturated groundwater flow. *Georisk: Assessment and Management of Risk for Engineered Systems and Geohazards*, 16(1), 21–36. <https://doi.org/10.1080/17499518.2021.1971251>
- Eymard, R., Gutnic, M., & Hilhorst, D. (1999). The finite volume method for Richards equation. *Computational Geosciences*, 3(3), 259–294. <https://doi.org/10.1023/A:1011547513583>
- Farthing, M. W., & Ogden, F. L. (2017). Numerical solution of Richards' equation: A review of advances and challenges. *Soil Science Society of America Journal*, 81(6), 1257–1269. <https://doi.org/10.2136/sssaj2017.02.0058>
- Goodfellow, I., Bengio, Y., & Courville, A. (2016). *Deep Learning*. MIT press Cambridge. <https://www.deeplearningbook.org/>
- Guan, J., Bragdon, S. P., & Clausen, J. L. (2024). Predicting soil moisture content using physics-informed neural networks (PINNs). Engineer Research and Development Center. <https://doi.org/10.21079/11681/48794>
- Kamil, H., Soulaïmani, A., & Beljadid, A. (2024). Physics-informed neural network vs finite element method for modeling coupled water and solute flow in unsaturated soils. In *16th World Congress on Computational Mechanics and 4th Pan American Congress on Computational Mechanics*, <https://doi.org/10.23967/wccm.2024.051>
- Karniadakis, G. E., Kevrekidis, I. G., Lu, L., Perdikaris, P., Wang, S., & Yang, L. (2021). Physics-informed machine learning. *Nature Reviews Physics*, 3(6), 422–440. <https://doi.org/10.1038/s42254-021-00314-5>
- Kingma, D. P., & Ba, J. (2014). Adam: A method for stochastic optimization. <https://arxiv.org/abs/1412.6980>

- Lai, W., & Ogden, F. L. (2015). A mass-conservative finite volume predictor–corrector solution of the 1D Richards’ equation. *Journal of Hydrology*, 523, 119–127. <https://doi.org/10.1016/j.jhydrol.2015.01.053>
- Li, Y., Sun, Q., Fu, Y., & Wei, J. (2025). Solving the Richards infiltration equation by coupling physics-informed neural networks with Hydrus-1D. *Scientific Reports*, 15(1), 18649. <https://doi.org/10.1038/s41598-025-02978-w>
- List, F., & Radu, F. A. (2016). A study on iterative methods for solving Richards’ equation. *Computational Geosciences*, 20(2), 341–353. <https://doi.org/10.1007/s10596-016-9566-3>
- MathWorks. (2025). *MATLAB R2025b*. The MathWorks Inc. https://www.mathworks.com/help/pdf_doc/matlab/matlab_env.pdf
- Moriasi, D. N., Arnold, J. G., Van Liew, M. W., Bingner, R. L., Harmel, R. D., & Veith, T. L. (2007). Model evaluation guidelines for systematic quantification of accuracy in watershed simulations. *Transactions of the ASABE*, 50(3), 885–900. <https://doi.org/10.13031/2013.23153>
- Oikawa, K., & Saito, H. (2024). Inverse analysis of soil hydraulic parameters of layered soil profiles using physics-informed neural networks with unsaturated water flow models. *Vadose Zone Journal*, 23(6). <https://doi.org/10.1002/vzj2.20375>
- Patel, P., & Yadav, S. R. (2026). Application of physics-informed neural networks for solving water penetration problems in unsaturated soils. *Engineering with Computers*, 42(1), 9. <https://doi.org/10.1007/s00366-025-02263-4>
- Phankamolsil, Y., & Kositsakulchai, E. (2008). Jirais-sw: An object-oriented model for soil-water flow simulation. *Kamphaeng saen Academic Journal*, 6(1), 44–59.
- Radcliffe, D. E., & Simunek, J. (2010). *Soil Physics with HYDRUS. Modeling and Applications*. CRC Press.
- Raissi, M., Perdikaris, P., & Karniadakis, G. E. (2019). Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations. *Journal of Computational Physics*, 378, 686–707. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2018.10.045>
- Richards, L. A. (1931). Capillary conduction of liquids through porous mediums, *Journal of Applied Physics*, 1, 318–333. <https://doi.org/10.1063/1.1745010>
- Richardson, L. F. (1922). *Weather Prediction by Numerical Process*. Cambridge University Press.
- Šimůnek, J., Genuchten, M. T. v., & Šejna, M. (2016). Recent developments and applications of the HYDRUS computer software packages. *Vadose Zone Journal*, 15(7), vzj2016.2004.0033. <https://doi.org/10.2136/vzj2016.04.0033>

- Šimůnek, J., Šejna, M., Saito, H., Sakai, M., & van Genuchten, M. T. (2018). *The HYDRUS-1D Software Package for Simulating the One-Dimensional Movement of Water, Heat, and Multiple Solutes in Variably-Saturated Media*. University of California Riverside.
- Sitzmann, V., Martel, J.N., Bergman, A.W., Lindell, D.B., & Wetzstein, G. (2020). Implicit Neural Representations with Periodic Activation Functions. <https://arxiv.org/abs/2006.09661>
- Song, W., Shi, L., Wang, L., Wang, Y., & Hu, X. (2022). Data-driven discovery of soil moisture flow governing equation: A sparse regression framework. *Water Resources Research*, 58(8), e2022WR031926. <https://doi.org/10.1029/2022wr031926>
- Tracy, F. T. (2006). Clean two- and three-dimensional analytical solutions of Richards' equation for testing numerical solvers. *Water Resources Research*, 42(8). <https://doi.org/10.1029/2005WR004638>
- van Genuchten, M. T. (1980). A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils. *Soil Science Society of America Journal*, 44(5), 892–898. <https://doi.org/10.2136/sssaj1980.03615995004400050002x>
- Vereecken, H., Schnepf, A., Hopmans, J. W., Javaux, M., Or, D., Roose, T., Vanderborght, J., Young, M. H., Amelung, W., Aitkenhead, M., Allison, S. D., Assouline, S., Baveye, P., Berli, M., Brüggemann, N., Finke, P., Flury, M., Gaiser, T., Govers, G.,...Young, I. M. (2016). Modeling soil processes: Review, key challenges, and new perspectives. *Vadose Zone Journal*, 15(5), 1-57. <https://doi.org/10.2136/vzj2015.09.0131>
- Yingjajaval, S. (1993). *A Catalogue of Water Retention Functions of Major Soil Series of Thailand*. Kasetsart University Research and Development Institute.
- Zha, Y., Yang, J., Zeng, J., Tso, C.-H. M., Zeng, W., & Shi, L. (2019). Review of numerical solution of Richardson–Richards equation for variably saturated flow in soils. *WIREs Water*, 6(5), e1364. <https://doi.org/10.1002/wat2.1364>